Segunda edición

Eduardo Carpinteyro

Geometría analítica

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Geometría analítica

www.elsolucionario.org

www.elsolucionario.org

Primera edición ebook, 2016

Geometría analítica

Eduardo Carpinteyro Vigil

GRUPO EDITORIAL PATRIA

www.elsolucionario.org

Para establecer comunicación con nosotros puede utilizar estos medios:

correo:

Renacimiento 180,
Col. San Juan Tlihuaca,
Azcapotzalco, 02400,
México, D.F.

e-Mail:

info@editorialpatria.com.mx

Fax pedidos:

(0155) 5354 9109 • 5354 9102

sitio web:

www.editorialpatria.com.mx

teléfono:

(0155) 53 54 91 00

Grupo Editorial Patria®

División Bachillerato, Universitario y Profesional

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas

Coordinación editorial: Alma Sámano Castillo

Diseño de interiores y portada: Juan Bernardo Rosado Solís

Supervisor de producción editorial: Miguel Ángel Morales Verdugo

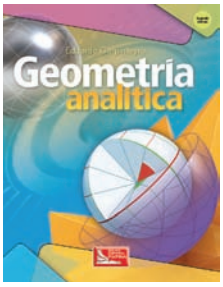
Revisor técnico: Alex Polo Velázquez

Diagramación: Jorge Antonio Martínez Jiménez y Gustavo Vargas Martínez

Ilustraciones: Perla Alejandra López Romo, Jorge Antonio Martínez Jiménez y Gustavo Vargas Martínez

Fotografías: Thinkstock

Desarrollo del tema de Hipérbola: Rubén B. Sánchez Hernández



Geometría analítica

Derechos reservados:
© 2016, Eduardo Carpinteyro Vigil
© 2016, GRUPO EDITORIAL PATRIA, S.A. DE C.V.
ISBN ebook: 978-607-744-473-2 (Primera edición)

Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México / Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2016

www.elsolucionario.org

Contenido

Introducción VII
Descripción de la segunda edición de la obra IX
Competencias disciplinarias básicas y extendidas de las matemáticas X
Propósito formativo de la asignatura X
Mapa de contenidos XI
Cronograma de actividades XII
Conoce tu libro XIV

Unidad 1

SISTEMAS COORDENADOS 2

Evaluación diagnóstica 3
Tema integrador 4
1.1 SISTEMA RECTANGULAR 9
Puntos en el plano 9
Distancia entre dos puntos 18
División de un segmento en una razón dada 21
Punto medio 27
Perímetros y áreas 32
1.2 SISTEMA POLAR 38
Radio vector y ángulo polar 40
Transformaciones del sistema coordenado polar al rectangular y viceversa 40
Recuperación de información 46
Autoevaluación 48
Autoevaluación disciplinar 49

Unidad 2

LUGARES GEOMÉTRICOS. LA RECTA 50

Evaluación diagnóstica 51
Tema integrador 52
2.1 PENDIENTE Y ÁNGULO DE INCLINACIÓN 57
2.2 FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA Y SUS TRANSFORMACIONES 63
Ecuación punto-pendiente 63
Ecuación pendiente-ordenada al origen 70

www.elsolucionario.org

Ecuación general ... 75
Ecuación simétrica ... 81
Ecuación normal ... 87
2.3 INTERSECCIÓN DE RECTAS ... 93
2.4 RELACIÓN ENTRE RECTAS ... 97
2.5 RECTAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO ... 107
Recuperación de información ... 115
Autoevaluación ... 117
Autoevaluación disciplinar ... 118

Unidad 3

LUGARES GEOMÉTRICOS. LAS CÓNICAS ... 120

Evaluación diagnóstica ... 121
Tema integrador ... 123
3.1 CIRCUNFERENCIA ... 126
Obtención de los elementos de una circunferencia partiendo de su ecuación general ... 133
Ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos ... 135
3.2 PARÁBOLA ... 139
Obtención de los elementos de una parábola ... 145
3.3 ELIPSE ... 152
Elementos de la elipse ... 159
3.4 HIPÉRBOLA ... 163
Ecuación general de la hipérbola ... 165
Elementos de la hipérbola ... 171
Recuperación de información ... 174
Autoevaluación ... 175
Autoevaluación disciplinar ... 176

SOLUCIÓN A EJERCICIOS SELECCIONADOS ... 178

GLOSARIO ... 216

www.elsolucionario.org

Introducción

Esta es la tercera obra de la serie dedicada al Bachillerato Tecnológico, mantiene la estructura y las características didácticas de los dos textos anteriores (*Álgebra y aplicaciones y Geometría y trigonometría. Conceptos y aplicaciones*), presenta al alumno y al docente una distribución flexible de los contenidos, el desarrollo en tres momentos; *apertura*, *desarrollo* y *cierre*, así como una evaluación diagnóstica y una autoevaluación tanto de contenidos como de valores y actitudes hacia el trabajo colaborativo.

En la esencia misma de la geometría analítica en dos dimensiones, esta edición actualizada pretende establecer el enlace integrador del álgebra y la geometría, presentando distintos problemas de aplicación en entornos sociales, económicos y prácticos de la vida del estudiante, enfatizando la utilidad de aprender, no solo matemáticas sino también de ser capaz de aplicar ese conocimiento en la resolución de problemas que se puedan presentar.

Una de las finalidades de la educación es que la persona que se beneficia de ella, se apropie de los elementos que le serán de utilidad como herramienta para la adquisición de información y(o) conocimientos, que pueda usar para resolver las situaciones que va a enfrentar en su vida cotidiana, en su promoción intelectual y(o) actividad social o laboral.

Actualmente en el nivel medio superior, la enseñanza de las matemáticas se vincula con la contextualización del conocimiento, el cual presenta como factor de motivación, la resolución de problemas de aplicación de los conceptos que se van estudiando, con la finalidad de introducir al estudiante al uso de sus conocimientos en la producción de resultados, en la habilidad de compartir opiniones y justificar acciones y procedimientos.

En mayor o menor grado, socialmente ubicamos a las matemáticas como una de las herramientas básicas de cualquier ciencia y vivimos en forma cotidiana todos los beneficios logrados por ésta, sobre todo en el campo de las comunicaciones, aunque no siempre se reflexiona sobre el camino recorrido por los hombres de ciencia para este logro y cómo es que construye una persona su conocimiento matemático.

Es importante que consideres que para tu curso escolar puedes lograr las metas que te fijes, siempre y cuando estés dispuesto a trabajar con dedicación y constancia en el esfuerzo por conseguirlas. Así que para tener éxito en tus estudios de matemáticas, no te contentes con ir siguiendo a tu profesor en el curso escolar, ¡anticípate a él! Prepara la lección antes de recibirla, desiste de una actitud pasiva y ve construyendo tu conocimiento de la asignatura, en cambio tú eres el que aprende, el actor principal para el cual el proceso de enseñanza tiene un fin preciso, el que hagas tuyo el conocimiento.

Lic. Eduardo Carpinteyro Vigil

www.elsolucionario.org

www.elsolucionario.org

Descripción de la segunda edición de la obra

La mejor forma que encuentro para empezar la descripción de este texto es darte las gracias por permitirme acompañarte en tu esfuerzo por alcanzar un nivel más de preparación, el cual continúa en este tercer semestre de bachillerato.

La presente edición está dividida en tres unidades temáticas, correspondientes a la asignatura actualizada de Geometría analítica del plan de estudios de la Dirección General de Educación Tecnológica e Industrial de la SEP.

En cada una de las unidades encontrarás para empezar una actividad, a la que he llamado Secuencia didáctica, la cual espero que intentes resolver con tus propias herramientas. Estas actividades las puedes resolver con ayuda de los conocimientos que hayas adquirido con anterioridad y un poco de ingenio, pero si no te es posible hacerlo, no te desanimes, sigue avanzando en tu estudio y encontrarás en los temas que abarca la unidad, los elementos necesarios para encontrar la solución pedida.

Se te presenta también una rúbrica en la que se te indica el nivel de eficiencia de tu actividad y que puede ser una guía para saber qué se espera de ti. Asimismo en estas páginas se presenta un calendario por semana para ayudarte a organizar tu tiempo de estudio y dedicación a la asignatura.

La forma en la que se presentan los temas que componen las diferentes unidades parte de un enfoque intuitivo que poco a poco se va formalizando por medio del simbolismo matemático correspondiente, una ejemplificación del concepto y(o) su demostración, de las cuales considero que no se hace uso excesivo de esta obra.

En las unidades encontrarás el número de ejercicios que consideramos de utilidad para comprender y reafirmar cada uno de los temas tratados. Éstos los presentamos en forma de problema y(o) ejercicios rutinarios, mediante diferentes formas de presentación, las secciones de Recuperación de información, una por cada unidad y en las que podrás comprobar el dominio que has adquirido con tu estudio constante. Puedes utilizarlas como una forma de poner a prueba los conocimientos que has hecho tuyos.

Al final de cada unidad se proponen los ejercicios de Autoevaluación en los que puedes evaluar tanto tu desempeño en el aula y tu actitud hacia el trabajo colaborativo en el aula, así como el dominio que vas adquiriendo sobre los contenidos del programa.

En esta segunda edición se renovaron todas las evaluaciones diagnósticas ubicadas al inicio de la unidad. También se actualizaron y reordenaron los temas de la primera unidad de acuerdo a lo señalado en el programa. Se incluyeron algunas lecturas con actividades adicionales. Se agregó un breve glosario y se renovaron algunas gráficas y fotografías.

Espero que al final de tu estudio puedas decidir y valorar tanto la actividad que desarrollaste como la satisfacción que da la comprensión de los temas estudiados.

www.elsolucionario.org

Competencias disciplinarias básicas y extendidas de las matemáticas

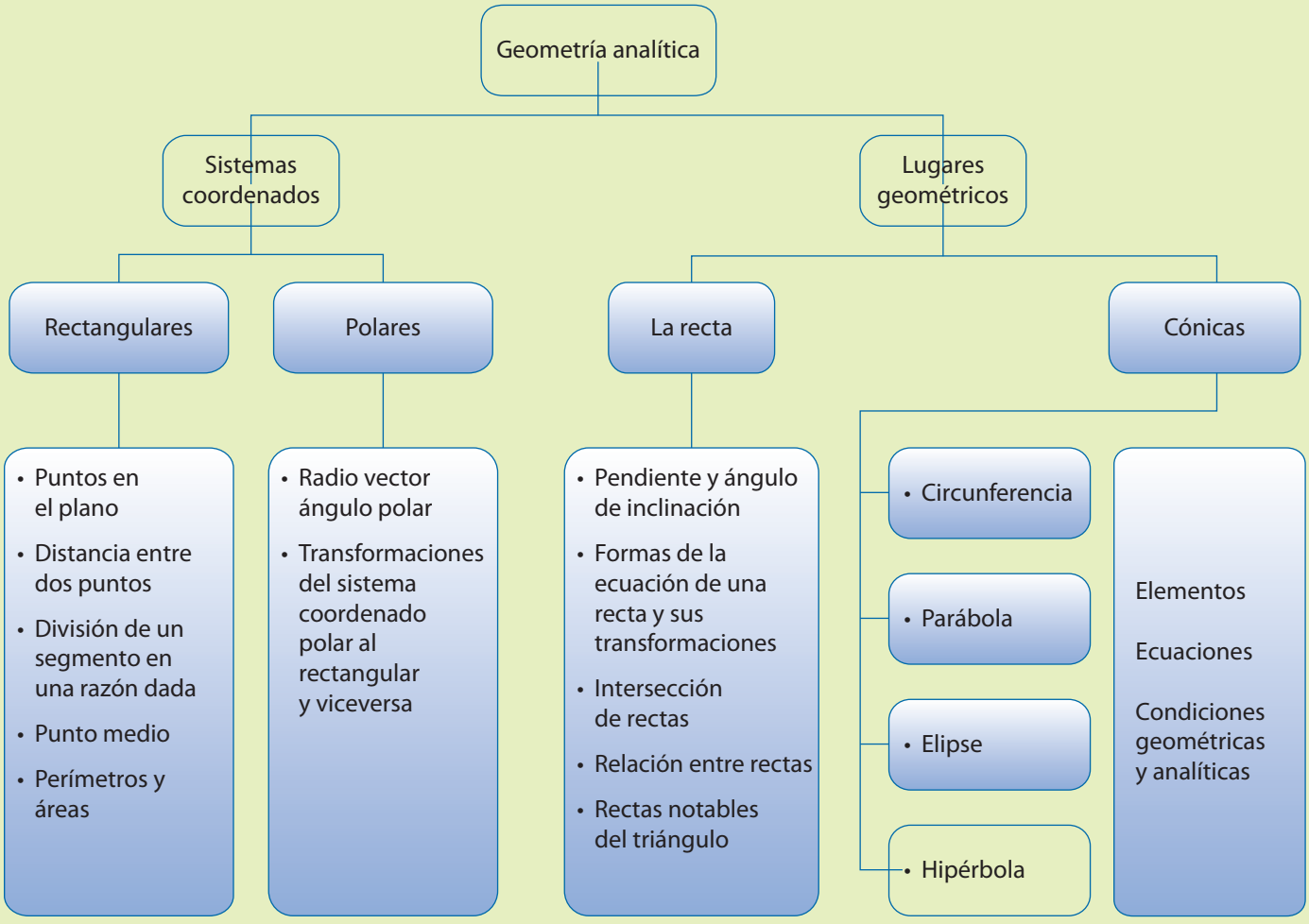
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodea.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Propósito formativo de la asignatura

Que el estudiante interprete, argumente, comunique y resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano.

www.elsolucionario.org

Mapa de contenidos


Geometría analítica
Sistemas coordenados
Lugares geométricos
Rectangulares
Polares
La recta
Cónicas
• Puntos en el plano
• Distancia entre dos puntos
• División de un segmento en una razón dada
• Punto medio
• Perímetros y áreas
• Radio vector ángulo polar
• Transformaciones del sistema coordenado polar al rectangular y viceversa
• Pendiente y ángulo de inclinación
• Formas de la ecuación de una recta y sus transformaciones
• Intersección de rectas
• Relación entre rectas
• Rectas notables del triángulo
• Circunferencia
• Parábola
• Elipse
• Hipérbola
Elementos
Ecuaciones
Condiciones geométricas y analíticas
Graficación
APLICACIONES
Solución de situaciones a través de métodos geométricos y algebraicos.
Ubicación de objetos en sistemas coordenados, cálculo de superficies, distancias, pendientes y ángulos de inclinación, entre otros.

www.elsolucionario.org

Cronograma de actividades

En esta sección, se presenta una propuesta de distribución de los contenidos por semana de trabajo, con la finalidad de ayudarte a que administres tu tiempo a lo largo del semestre, para que logres alcanzar las metas de trabajo de la asignatura. Procura no faltar a clase ya que la discusión que se realiza en ella dirigida por tu profesor sobre los temas correspondientes aporta otros elementos a tu formación, como son la construcción de saberes y la comunicación de conocimientos. Tu participación en clase no solo te ayuda sino que también enriquece a tus compañeros y juntos pueden comprender mejor los conceptos que se estudien.

Unidad 1 Sistemas coordenados

Semana	Ubicación (páginas)	Tema	Contenido programático
1-2	9 a 38	Sistema rectangular	• Puntos en el plano • Distancia entre dos puntos • División de un segmento en una razón dada • Punto medio • Perímetros y áreas
3	38 a 49	Sistema polar	• Radio vector y ángulo polar • Transformaciones del sistema coordenado polar al rectangular y viceversa

Unidad 2 Lugares geométricos. La recta

Semana	Ubicación (páginas)	Tema	Contenido programático
4	57 a 63	Pendiente y ángulo de inclinación	
5-7	63 a 92	Formas de la ecuación de una recta y sus transformaciones	• Ecuación punto-pendiente • Ecuación pendiente-ordenada al origen • Ecuación general • Ecuación simétrica • Ecuación normal
8	93 a 97	Intersección de rectas	
9	97 a 107	Relación entre rectas	
10	107 a 119	Rectas notables del triángulo	

www.elsolucionario.org

Semana	Ubicación (páginas)	Tema	Contenido programático
11	126 a 138	Circunferencia	• Obtención de los elementos de una circunferencia partiendo de su ecuación general • Ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos
12-13	139 a 152	Parábola	• Obtención de los elementos de una parábola
14	152 a 162	Elipse	• Elementos de la elipse
15-16	163 a 177	Hipérbola	• Elementos de la hipérbola

www.elsolucionario.org

Apertura

Apertura de unidad

Aquí encontrarás las competencias que debes lograr con el estudio de cada unidad, así como las actitudes y valores que señalan cuál debe ser tu disposición para hacer las cosas y las repercusiones que tiene ese hacer, de tal manera que adquieras una plena conciencia cívica y ética de las posibles consecuencias de tus acciones y hechos. Después se indica el título del tema integrador.

En el primer momento, conocerás los conceptos fundamentales y subsidiarios que se abordarán en la unidad; se presentará una introducción que te señalará de manera breve lo que vas a aprender; habrá una serie de preguntas en la sección denominada: *Evaluación diagnóstica* que te posibilitará reflexionar acerca de tus preconcepciones y los conocimientos previos que posees respecto a los contenidos que involucra cada apartado, de tal manera que identifiques y recuperes los saberes adquiridos por medio de tus experiencias cotidianas y de los estudios previos que realizaste. Esta sección también ayuda a que tu profesora(a) conozca tus ideas y conocimientos antes de iniciar el estudio de la unidad.

Desarrollo

Desarrollo de los contenidos de cada unidad

Éste se lleva a cabo en el segundo momento por medio de contenidos y diversas actividades que posibilitan construir conceptos de manera sistematizada y en diversos contextos. Para ello, este libro cuenta con diversas experiencias de aprendizaje que resolverás de diversas maneras, tales como: investigaciones en diferentes fuentes de información que tengas a tu alcance y a partir de las cuales obtengas conclusiones; investigaciones de campo; presentaciones, o alguna otra actividad que contribuya a despertar tu interés y promueva que desde el inicio del estudio de cada unidad comiences a utilizar tus saberes, los fortalezcas y adquieras otros nuevos, obtenidos de manera individual, en equipo o grupal.

La autoevaluación tiene el propósito de que reflexiones acerca de los resultados obtenidos después de realizar las diferentes actividades de aprendizaje. La coevaluación o heteroevaluación harán posible el intercambio de ideas, experiencias y aprendizajes adquiridos. Ese intercambio entre ustedes, junto con las valiosas aportaciones de su profesor(a), enriquecerá sus conocimientos y aprendizajes adquiridos. Finalmente, las actividades que desarrolles puedes recopilarlas y elaborar un

www.elsolucionario.org

portafolio de evidencias que constatará tu desempeño escolar, ya sea en una carpeta física o en una carpeta creada en tu computadora para cada unidad. Tu profesor(a) te indicará cómo hacerlo y te señalará qué otras evidencias debes conservar y cuál es el momento oportuno para que se las muestres.

Cierre

Cierre de cada apartado

En esta etapa o tercer momento es posible realizar una síntesis de los conceptos fundamentales y subsidiarios que se abordan durante los momentos de apertura y desarrollo, por lo que es útil para que tú y tus compañeros(as) reflexionen sobre qué aprendieron. El libro proporciona la resolución de un cuestionario que contiene diversas actividades y valores que se indican en cada unidad. Si respondes satisfactoriamente el cuestionario, esto indica que puedes seguir adelante; en caso contrario, repasa aquello que te provoca dudas. No dudes en apoyarte en tus compañeros y compañeras o en tu profesor(a).

Contribución de tu libro de texto al logro de las competencias esperadas en cada unidad

En tu libro encontrarás información de gran relevancia que contribuirá a que logres las competencias esperadas en cada unidad, además incluye una serie de ejercicios y actividades que puedes realizar de acuerdo con las instrucciones de tu profesor(a), entre las que destacan: resolución de problemas prácticos y de aplicación a la vida cotidiana, lecturas sugeridas en Internet y actividades.

www.elsolucionario.org

1 Unidad

SISTEMAS COORDENADOS

www.elsolucionario.org

Competencias a desarrollar:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados, mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.

Contenido para aprender

1.1 Sistema rectangular

1.2 Sistema polar

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Escribe en el paréntesis el inciso que corresponda a la respuesta correcta.

1. $\frac{5}{8} - \left(-\frac{4}{3}\right) =$ ( )

a) $\frac{47}{24}$ *b)* $-\frac{17}{24}$ *c)* $\frac{1}{5}$ *d)* $\frac{9}{11}$

2. $\sqrt{(4-9)^2 + (-3-9)^2} =$ ( )

a) $\sqrt{119}$ *b)* $\sqrt{61}$ *c)* $\sqrt{17}$ *d)* 13

3. $(3x-2)(3x-5) =$ ( )

a) $9x^2 - 21x + 10$ *b)* $6x^2 + 21x - 10$

c) $9x^2 - 21x - 10$ *d)* $9x^2 + 10$

www.elsolucionario.org

4. Factorización de $9x^2 - 24x + 16$ ( )

a) $(2 - 3x)^2$ *b*) $(9x + 4)(x + 4)$

c) $(3x + 2)(3x + 8)$ *d*) $(3x - 4)^2$

5. Dos rectas en un plano que no sean paralelas ( )

a) no se intersecan *b*) se intersecan en un punto

c) se intersecan en múltiples puntos *d*) se intersecan en dos puntos

6. Dos planos en el espacio que no sean paralelos ( )

a) se intersecan en un solo punto *b*) forman una línea recta al cortarse

c) no se intersecan *d*) forman un cuadrado al cortarse

7. La suma de los ángulos externos de un triángulo es igual a: ( )

a) 180° *b*) 270° *c*) 360° *d*) 540°

8. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a: ( )

a) 180° *b*) 270° *c*) 360° *d*) 90°

9. La distancia entre los puntos (–5, 0) y (7, 0) ( )

a) 2 *b*) $\sqrt{74}$ *c*) 12 *d*) 7

10. Punto que se encuentra a 10 unidades del punto (–5, 0) ( )

a) (10, 0) *b*) (5, 0) *c*) (–10, 0) *d*) (–5, 0)

Tema integrador

Secuencia didáctica

Apertura

Coordenadas geográficas

Al caminar por la calle, con tus amigos o familiares, te piden ayuda para localizar una dirección, ¿crees que para brindar ese tipo de ayuda necesitas un punto de referencia? Dicho punto te permite dar indicaciones precisas acerca del desplazamiento que se debe realizar para llegar a un lugar determinado. De manera similar, un lugar en nuestro planeta se puede localizar con precisión con ayuda de un mapa. Existen diferentes sistemas de localización, siendo el **Sistema de coordenadas** geográficas el que se usa en la actualidad.

www.elsolucionario.org

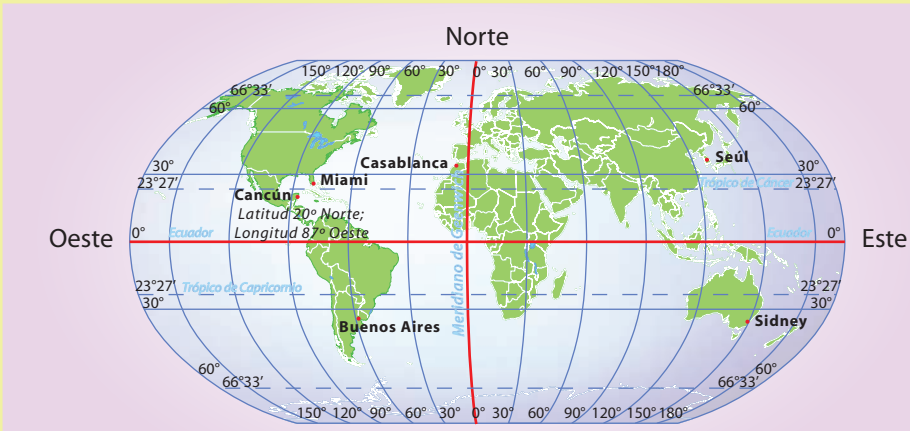
Las **coordenadas geográficas** son un conjunto de líneas imaginarias que nos permiten ubicar con exactitud un lugar en la superficie de la Tierra. A estas líneas las llamamos **meridianos** y **paralelos**.

Estas líneas o círculos son trazados por los cartógrafos en los mapas, por ello cualquier punto de nuestro planeta puede ubicarse si se conoce el meridiano de longitud y el paralelo de latitud.

Los paralelos son círculos imaginarios paralelos a la **línea del ecuador** y se encuentran siempre a la misma distancia con respecto al ecuador y a los demás paralelos.

La línea del ecuador se encuentra ubicada a la misma distancia de los polos, esta línea es el círculo máximo que divide a la Tierra en dos hemisferios: hemisferio norte y hemisferio sur.

Los paralelos normalmente se trazan sobre un plano de la Tierra a intervalos de 10°, tomando como origen el ecuador.



www.elsolucionario.org

La **latitud** es la distancia que hay entre cualquier paralelo y el ecuador. Además, se mide en grados a partir del círculo del ecuador hacia el Norte o el Sur.

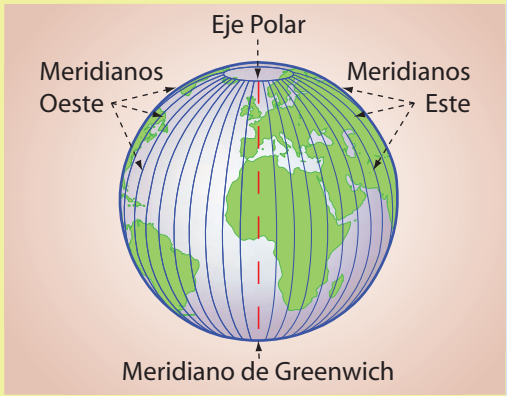
Debido al número de paralelos en cada hemisferio, la mayor latitud que se puede medir en cada uno es de 90°.

Los meridianos son los círculos máximos que pasan por los polos. Se ha determinado como **meridiano de origen** a aquel que pasa por el observatorio Astronómico de Greenwich, en Inglaterra, y divide a la Tierra en dos hemisferios: Hemisferio Oeste u Occidental y Hemisferio Este u Oriental.

A partir del meridiano 0° un meridiano puede tener cualquier valor entre 0° y 180° al Este o al Oeste y en los mapas normalmente se trazan cada 15°.

La **longitud** es la distancia en grados, entre cualquier meridiano y el meridiano de Greenwich, que es un punto general de referencia. En la Tierra, los meridianos están trazados a intervalos de 15°. La longitud se mide exclusivamente hacia el Este o el Oeste.

Puesto que media circunferencia corresponde a 180° la mayor longitud que se puede medir en cada uno es de 180°, tanto al Este como al Oeste.



Apertura	Desarrollo	Cierre
• Forma equipo con cuatro compañeros. • Lean con atención el texto integrador. • Comenten sus experiencias cotidianas con la localización de lugares en su comunidad.	• Investiguen las coordenas geográficas de Monterrey, Buenos Aires, Roma, Estambul, Pekín.	• Escriban en su cuaderno el significado etimológico de la palabra geometría. Comenten qué importancia tienen los sistemas de representación de puntos en un plano.
• Investiguen: a) Las coordenadas geográficas de distintas ciudades en un plano. b) ¿Qué es el plano cartesiano y por qué se le nombra así?	• Investiguen el origen de tres de los sistemas de representación de puntos en un plano. a) Sistema de coordenadas cartesianas. b) Sistema de coordenadas polares. c) Sistema de coordenadas cilíndricas. • Investiguen actualmente cómo se define a la Geometría Analítica y contesten las siguientes preguntas: a) ¿Quién es su fundador? b) ¿Cómo la dio a conocer? c) ¿En qué se puede aplicar en tu entorno cotidiano?	• Escriban en su cuaderno los elementos que investigaron.

www.elsolucionario.org

Rúbrica

Categoría	Excelente	Bien	Regular	Oportunidad de desarrollo
Terminología y notación	Utiliza adecuadamente los conceptos de coordenadas cartesianas: distancia entre dos puntos, división de un segmento en una razón dada y coordenadas polares, empleando una notación correcta y permitiendo que la lectura de sus documentos sean de fácil entendimiento.	La utilización de conceptos sobre coordenadas cartesianas: distancia entre dos puntos, división de un segmento en una razón dada y coordenadas polares y su notación, es correcta en la mayoría de los documentos que produce; sin embargo, su lectura no siempre es fácil de entender.	No haces uso correcto de los conceptos de coordenadas cartesianas: distancia entre dos puntos, división de un segmento en una razón dada y coordenadas polares; y su notación no es muy eficiente dificultando la lectura de los documentos que produce.	Hay poco uso o uso inapropiado de los conceptos de coordenadas cartesianas, distancia entre dos puntos, división de un segmento en una razón dada y coordenadas polares, y de su notación, en los documentos que produce siendo éstos parciales o incompletos.
Errores matemáticos	Por lo menos 90% de los procesos y sus soluciones no contienen errores matemáticos.	De 80 a 89% de los procesos y sus resultados no presentan errores matemáticos.	Entre 60 y 79% de los procesos y sus resultados que presenta en sus documentos están libres de errores matemáticos.	Más de 40% de los procesos y soluciones contienen errores matemáticos.
Orden y organización	Presenta todos sus documentos de manera ordenada, clara y organizada para su lectura.	La mayoría de sus documentos están redactados en forma clara y organizada para facilitar su lectura.	En la mayoría de sus trabajos se detecta una falta de orden y claridad, lo cual dificulta su lectura.	Los trabajos que presenta se ven descuidados y/o desorganizados. Es difícil saber la forma en que procesa la información y cómo se relaciona ésta.
Comunicación de resultados	Su comunicación es fluida y adecuada al contexto.	Su comunicación es adecuada con respecto al tema, pero le falta fluidez.	Utiliza expresiones cotidianas inadecuadas al comunicarse.	Presenta oportunidades de aumentar léxico y fluidez.

www.elsolucionario.org

Propósito

Que los estudiantes interpreten, argumenten, comuniquen y resuelvan diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano, participando de manera responsable en la solución de problemas de su entorno.

¿Qué aprenderás?

- A localizar puntos en un plano, utilizando diferentes sistemas de representación.
- A obtener la distancia entre dos puntos y dividir un segmento en una razón dada, aplicando esto a ejercicios y problemas.
- A trazar gráficas de ecuaciones sencillas de dos variables.

¿Para qué te servirá?

El aprendizaje de los sistemas de representación es útil para la interpretación de planos, el uso de instrumentos de localización y en el cálculo de áreas y perímetros. En otros campos como el de la Física, te ayudará a comprender temas como el de las palancas, la representación de sistemas de fuerzas, etc. Y dentro del campo de la Geometría analítica te ayudará a representar secciones cónicas, como la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

www.elsolucionario.org

1.1 SISTEMA RECTANGULAR

Desarrollo

La Geometría analítica estudia la relación que existe entre el Álgebra y la Geometría, utilizando como herramienta básica la asociación de números con puntos y las ecuaciones de figuras geométricas. Las ideas fundamentales de esta disciplina matemática fueron publicadas por René Descartes en 1637, en el apéndice de la obra titulada *El discurso del método*, llamado La Geometría.

Puntos en el plano

1. Forma equipo con cuatro compañeros y localicen cada uno de los lugares indicados, buscando el recorrido más corto a partir del Zócalo de la ciudad de México (punto marcado con el globo con la letra A).

Lugar	Núm. de calles (de Este a Oeste)	Núm. de calles (de Norte a Sur)
Unidad Habitacional Candelaria de los Patos		
Barrio Chino		
Estación del metro Hidalgo		
Hostal Amigo Suites		
Estación de metrobús Morelos II		
Cámara de Diputados		
Jardín Oaxaca		

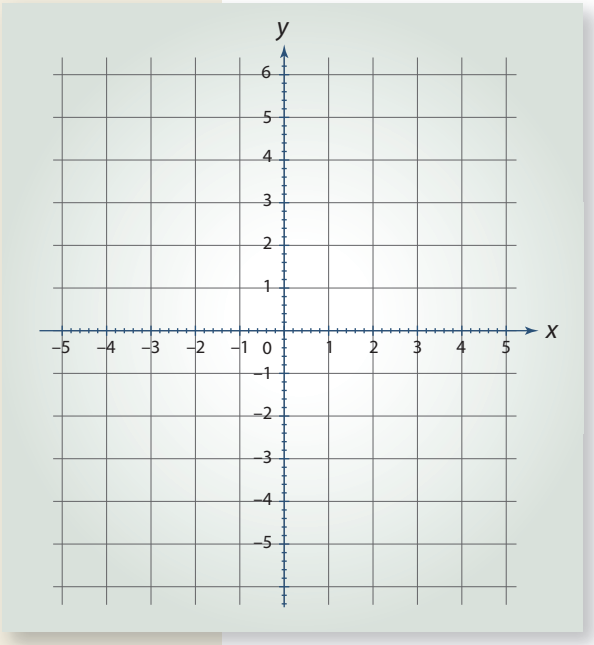
www.elsolucionario.org

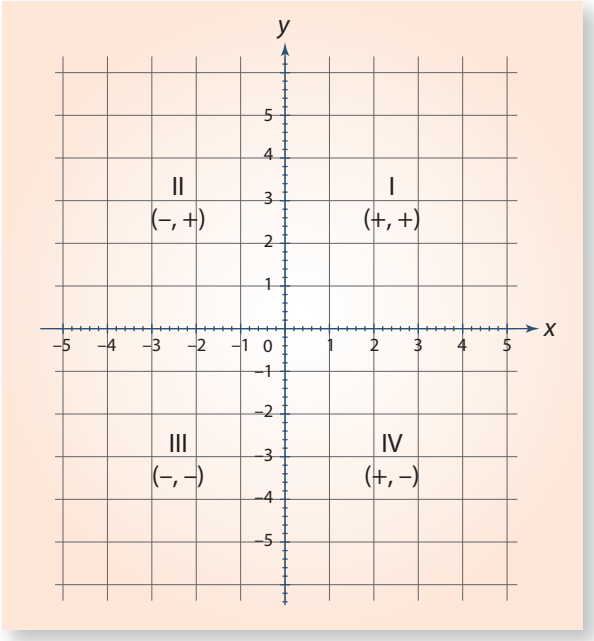
2. Consideren la escala que se indica en el plano y anoten cada uno de los desplazamientos en kilómetros.

Lugar	Núm. de kilómetros (de Este a Oeste)	Núm. de kilómetros (de Norte a Sur)
Unidad Habitacional Candelaria de los Patos		
Barrio Chino		
Estación del metro Hidalgo		
Hostal Amigo Suites		
Estación de metrobús Morelos II		
Cámara de Diputados		
Jardín Oaxaca		

3. Corroboren su solución con los demás equipos.

Cada punto de un plano se asocia con una pareja de números llamados **coordenadas**, los cuales indican las distancias dirigidas desde un punto determinado a dos rectas fijas: una horizontal llamada **eje *x*** o **eje de las abscisas** y otra vertical llamada **eje *y*** o **eje de ordenadas**, ambos ejes perpendiculares entre sí. El punto de intersección de los ejes se llama **origen** y se representa con la letra *O*.





Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro regiones, llamadas **cuadrantes**, numerados en sentido contrario al de las manecillas de un reloj, empezando con el cuadrante superior derecho en el que todos los puntos tienen las dos coordenadas positivas.

www.elsolucionario.org

La notación de cada punto en el plano es $P(x_0, y_0)$, esto significa que la abscisa del punto P es x_0 y su ordenada, y_0: o también (longitud, altura).

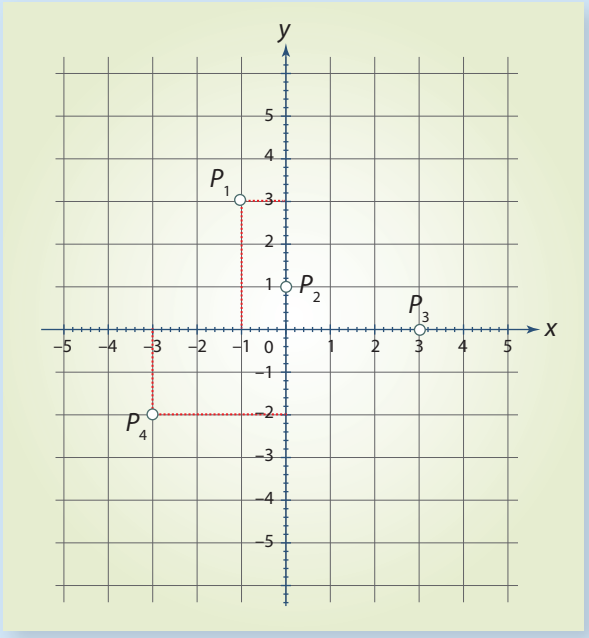
Ejemplo 1

Localiza los puntos $P_1(-1, 3)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(3, 0)$ y $P_4(-3, -2)$ en el plano cartesiano.

$P_1(-1, 3)$ — Altura

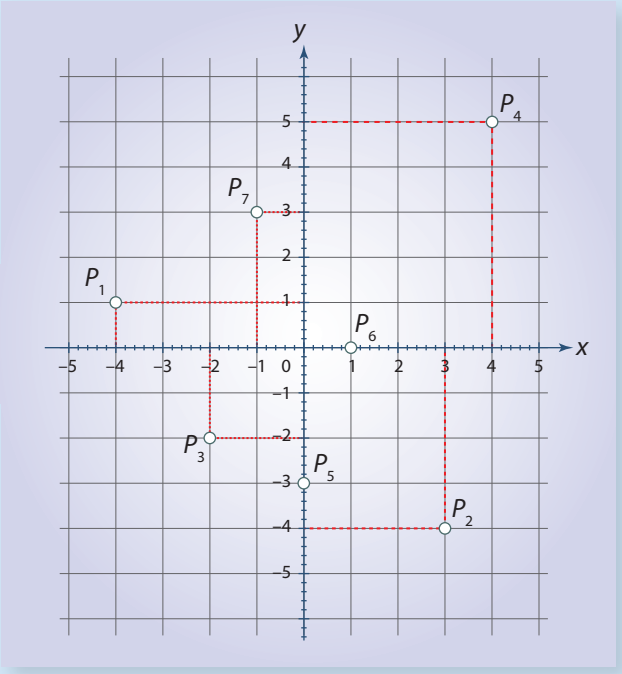
$P_2(0, 1)$

Longitud



Ejemplo 2

Indica las coordenadas de cada uno de los puntos señalados en el plano.



Continúa...

www.elsolucionario.org

Solución

En cada uno de los puntos, el primer número indica longitud y el segundo la altura. En cada par ordenado (longitud, altitud) = (abscisa, ordenada) = (x, y), por lo que:

$P_1(-4, 1)$	P_1 está localizado 4 unidades a la izquierda del origen del plano y 1 unidad hacia arriba del eje x.			
$P_2(3, -4)$				
$P_3(-2, -2)$				
$P_4(4, 5)$				
$P_5(0, -3)$	P_5 se localiza por debajo del origen del origen del plano a 3 unidades en el eje y.			
$P_6(1, 0)$				
$P_7(-1, 3)$				

Ejemplo 3

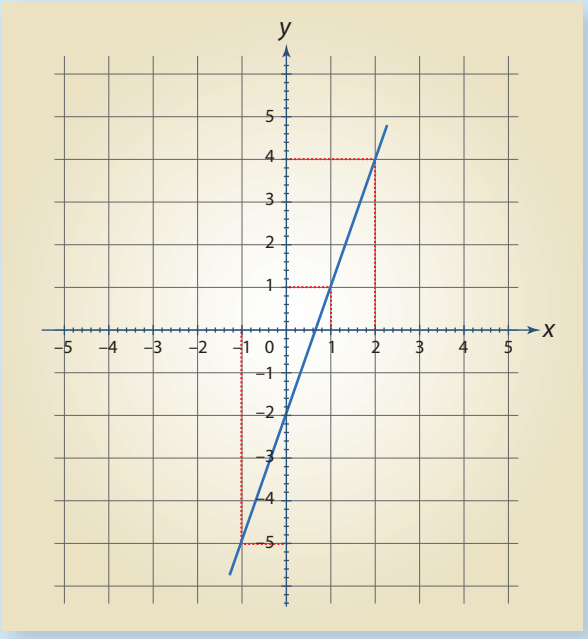
Obtén la gráfica de la siguiente ecuación.

$$3x - y = 2$$

Solución

Despejamos y asignando valores a x y obtenemos algunos puntos coordenados que graficamos, uniendo con una recta todos los puntos obtenidos.

x	$y = 3x - 2$	(x, y)
–1	$y = 3(-1) - 2$ $= -3 - 2$ $= -5$	(–1, –5)
0	$y = 3(0) - 2$ $= 0 - 2$ $= -2$	(0, –2)
1	$y = 3(1) - 2$ $= 3 - 2$ $= 1$	(1, 1)
2	$y = 3(2) - 2$ $= 6 - 2$ $= 4$	(2, 4)



www.elsolucionario.org

Ejemplo 4

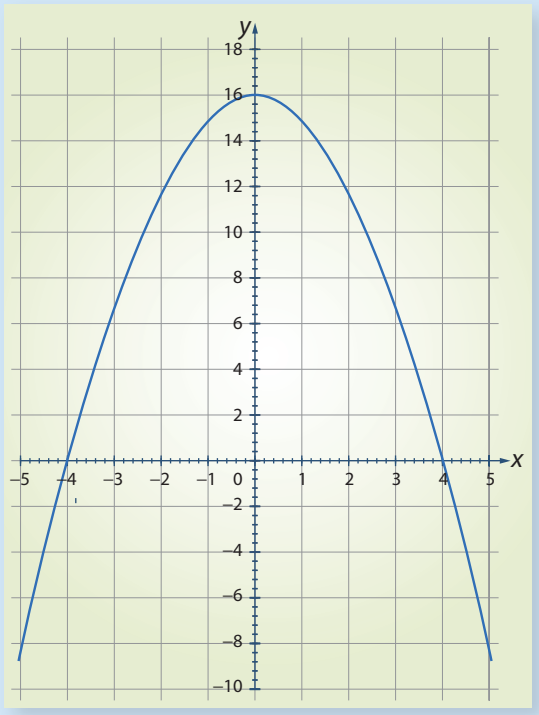
Obtén la gráfica y la intersección con los ejes coordenados de la curva dada por la siguiente ecuación:

$$x^2 + y - 16 = 0$$

Solución

Despejamos y asignando valores a x, obtenemos algunos puntos coordenados y graficamos, uniendo con una recta todos los puntos obtenidos.

x	$y = 16 - x^2$	(x, y)
-4	$y = 16 - (-4)^2$ $= 16 - 16$ $= 0$	$(-4, 0)$
-2	$y = 16 - (2)^2$ $= 16 - 4$ $= 12$	$(-2, 12)$
0	$y = 16 - (0)^2$ $= 16 - 0$ $= 16$	$(0, 16)$
2	$y = 16 - (2)^2$ $= 16 - 4$ $= 12$	$(2, 12)$
4	$y = 16 - (4)^2$ $= 16 - 16$ $= 0$	$(4, 0)$



Las intersecciones de la gráfica de la ecuación $x^2 + y - 16 = 0$ con el eje de las x tienen la forma $(x, 0)$, ya que son puntos en el eje x, mientras que las intersecciones con el eje y tienen la forma $(0, y)$ por estar en el eje y, esto nos permite calcular las coordenadas de estos puntos, dando el valor a cada una de las incógnitas de la ecuación para despejar la incógnita restante.

Intersecciones con el eje x

$$\begin{aligned} x^2 + y - 16 &= 0 \\ y &= 0 \\ x^2 + (0) - 16 &= 0 \\ x^2 - 16 &= 0 \\ x^2 &= 0 + 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x_1 &= -4 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Intersecciones con el eje y

$$\begin{aligned} x^2 + y - 16 &= 0 \\ x &= 0 \\ (0)^2 + y - 16 &= 0 \\ y - 16 &= 0 \\ y &= 0 + 16 \\ y &= 16 \end{aligned}$$

Siendo los puntos de intersección:

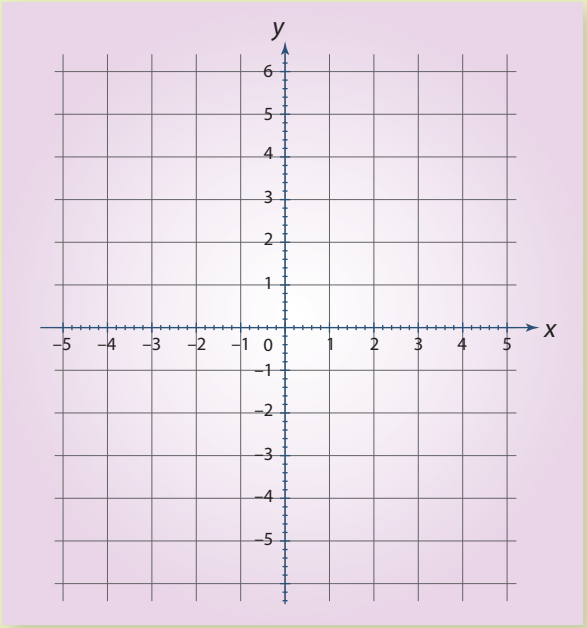
$(-4, 0)$, $(0, 16)$ y $(4, 0)$

www.elsolucionario.org

Ejercicio 1

1. Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano.

$P_1(3, 4)$, $P_2(1.5, -4)$, $P_3\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right)$, $P_4(-2, -1)$, $P_5(0, -2.5)$, $P_6(1, -3)$, $P_7\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$, $P_8(-0.5, 3)$, $P_9\left(\frac{3}{4}, -2.25\right)$ y $P_{10}(5, 0)$.



2. Escribe tres pares ordenados que satisfagan las siguientes condiciones.

a) La ordenada es el triple de la abscisa.

(,) (,) (,)

b) La abscisa es la mitad de la ordenada.

(,) (,) (,)

c) La ordenada es el simétrico del triple de la quinta parte de la abscisa.

(,) (,) (,)

d) La abscisa es el recíproco de la ordenada.

(,) (,) (,)

e) La ordenada es igual a la abscisa.

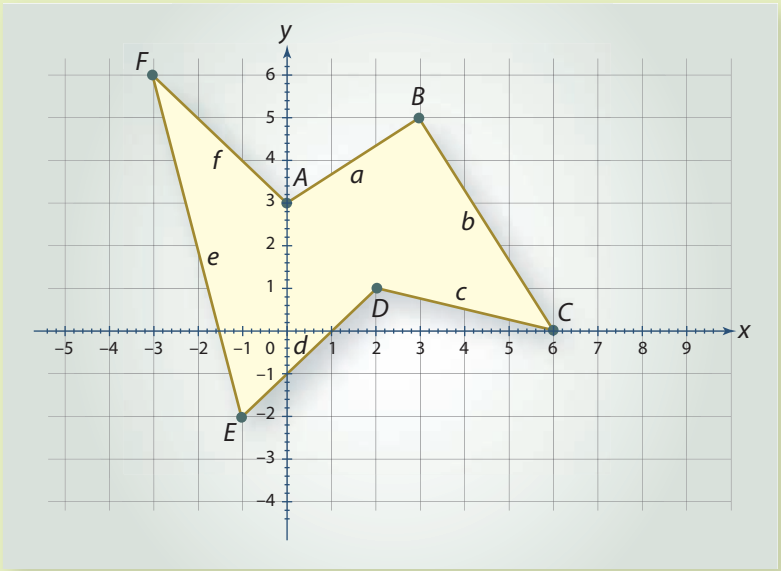
(,) (,) (,)

3. Completa la siguiente tabla.

Punto	Cuadrante	Punto	Cuadrante
(–4, 3)			Cuarto
	Primero	(0, –4)	
(2, –5)			Segundo
	Tercero	$\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right)$	
(5, 0)			En el eje *x*

www.elsolucionario.org

4. Determina las coordenadas de los vértices del siguiente polígono.



A(__, __)

B(__, __)

C(__, __)

D(__, __)

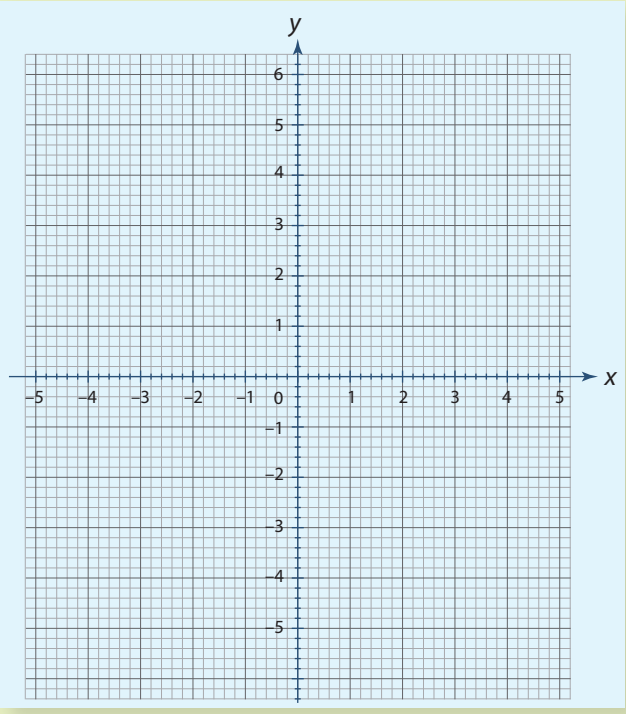
E(__, __)

F(__, __)

5. Completa la tabla y grafica los puntos obtenidos.

a) $y = 3 - 2x$

x	$y = 3 - 2x$	(x, y)
–1	$y =$ $=$ $=$	(–1,)
0	$y =$ $=$ $=$	(0,)
1	$y =$ $=$ $=$	(1,)
2	$y =$ $=$ $=$	(2,)

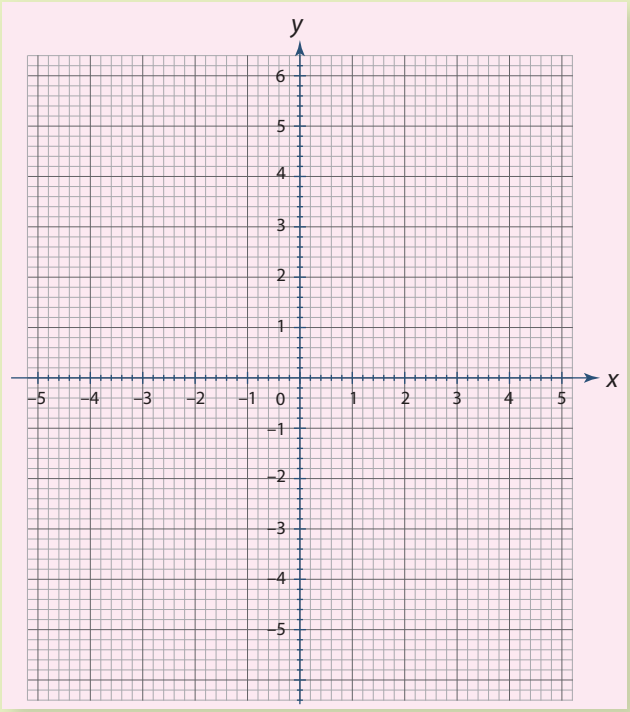


Continúa...

www.elsolucionario.org

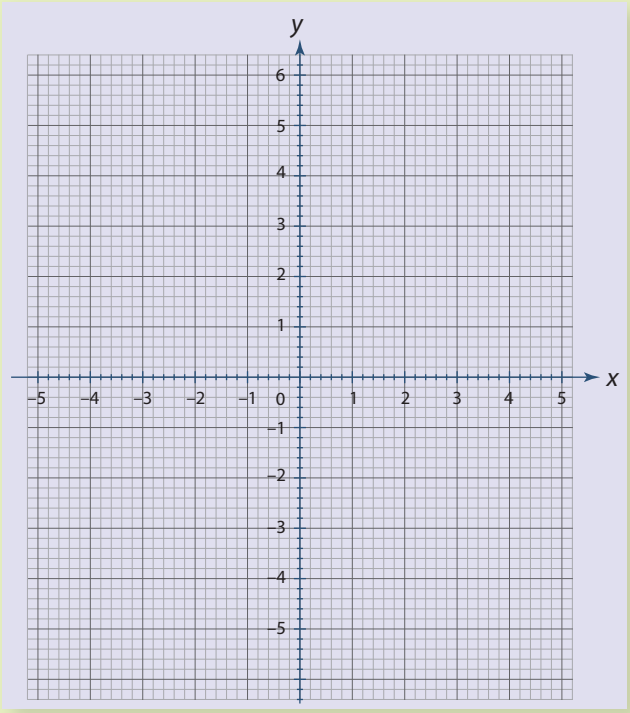
b) $y = -4x + 2$

x	$y = -4x + 2$	(x, y)
–1	$y =$ $=$ $=$	(–1,)
0	$y =$ $=$ $=$	(0,)
1	$y =$ $=$ $=$	(1,)
2	$y =$ $=$ $=$	(2,)



c) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

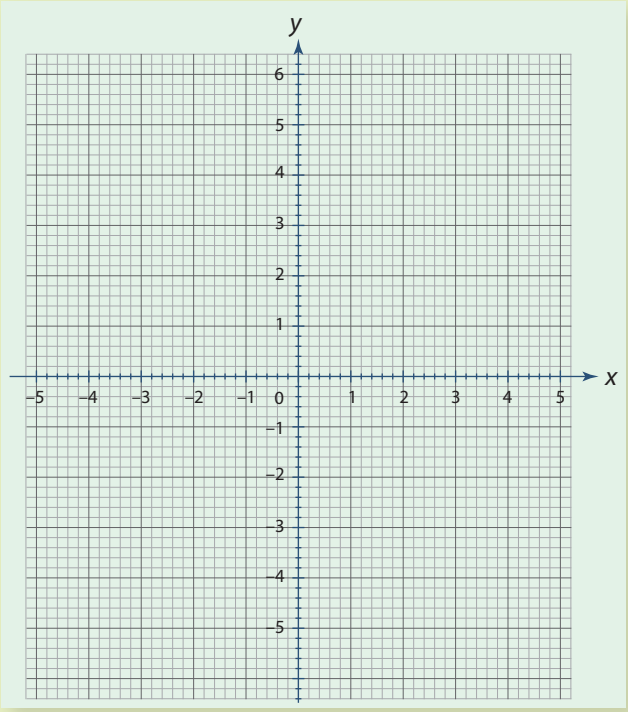
x	$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$	(x, y)
–1	$y =$ $=$ $=$	(–1,)
0	$y =$ $=$ $=$	(0,)
1	$y =$ $=$ $=$	(1,)
2	$y =$ $=$ $=$	(2,)



www.elsolucionario.org

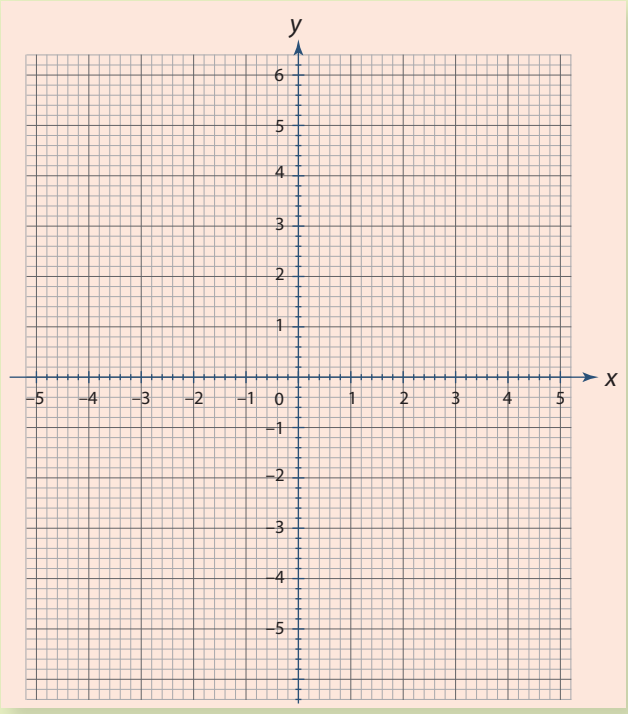
d) $y = x^2 + 2$

x	$y = x^2 + 2$	(x, y)
–1	$y =$ $=$ $=$	(–1,)
0	$y =$ $=$ $=$	(0,)
1	$y =$ $=$ $=$	(1,)
2	$y =$ $=$ $=$	(2,)



e) $y = 9 - x^2$

x	$y = 9 - x^2$	(x, y)
–1	$y =$ $=$ $=$	(–1,)
0	$y =$ $=$ $=$	(0,)
1	$y =$ $=$ $=$	(1,)
2	$y =$ $=$ $=$	(2,)



Continúa...

www.elsolucionario.org

6. Obtén las intersecciones con los ejes coordenados de las siguientes ecuaciones.

a) $3x - 2y - 6 = 0$ *b*) $x + 2y + 3 = 0$ *c*) $4x + y = 8$

d) $x^2 + y - 9 = 0$ *e*) $x - 2y^2 + 8 = 0$ *f*) $5x^2 + y - 10 = 0$

Investiga en Internet el desarrollo histórico de la Geometría analítica y con la información que obtengas realiza en tu cuaderno una línea de tiempo en la que indiques personajes y aportaciones.

Para realizar tu trabajo puedes consultar las siguientes direcciones:

http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/

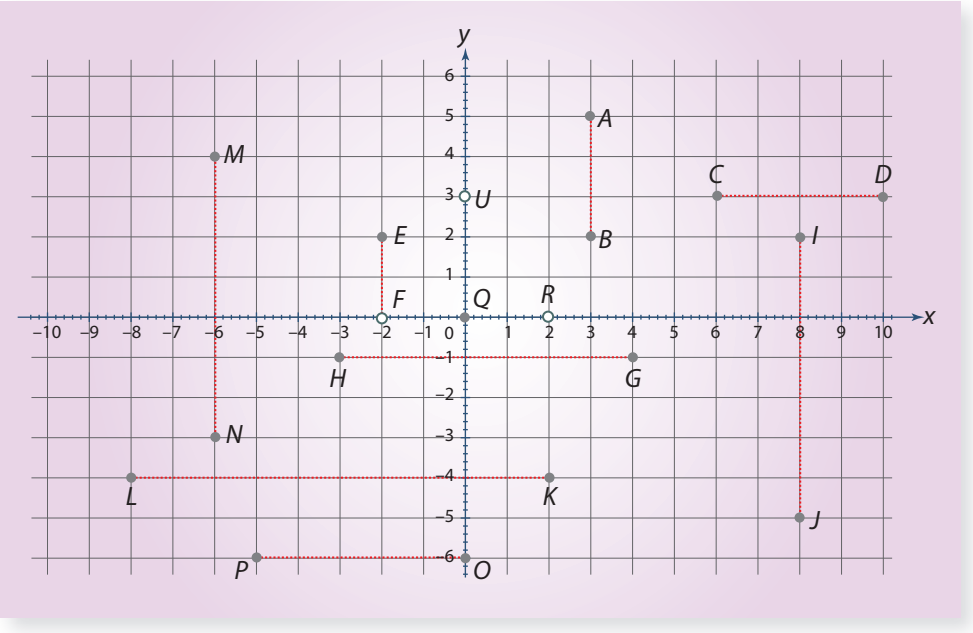
http://www.math2me.com

Distancia entre dos puntos

En Geometría plana, un segmento de recta es la parte comprendida entre dos puntos, los cuales se pueden representar por medio de coordenadas en el plano cartesiano: $P_i(x_i, y_i)$.

Existen tres tipos de segmentos de recta, éstos son; horizontales, verticales y oblicuos.

En el siguiente plano cartesiano hay 10 segmentos de recta, anota en la tabla las coordenadas del punto inicial y del punto final de cada segmento, así como su longitud. Luego, contesta las preguntas.



www.elsolucionario.org

Segmento	Coordenadas del punto inicial	Coordenadas del punto final	Operación	Longitud
AB				
CD				4
EF				
GH	(4, –1)			
IJ				
KL				
MN				7
OP				
QR		(2, 0)		
QU				

¿Qué característica tienen los puntos que están alineados verticalmente? _____

_____

¿Qué característica tienen los puntos que están alineados horizontalmente? _____

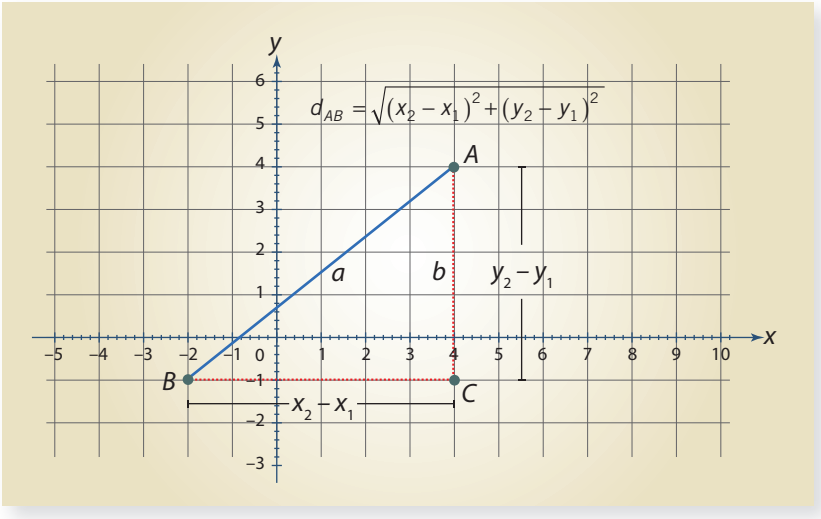
_____

Si se tiene un segmento de recta cuyo punto inicial es $P_1(x_1, y_1)$, con punto final en $P_2(x_2, y_2)$, anota en la tabla cómo expresas simbólicamente su longitud si el segmento es vertical u horizontal.

Segmento vertical	Segmento horizontal

Ahora, consideremos el caso en el que los puntos en el plano cartesiano no están alineados horizontal ni verticalmente, es decir, son oblicuos. Para calcular la distancia entre ambos puntos recurrimos al teorema de Pitágoras que se estudió en Matemáticas II. Los dos puntos entre los que queremos calcular la distancia están representados por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y la distancia es la longitud del segmento de recta que los une, como cada una de las coordenadas de un punto nos indican la distancia a la que están los ejes coordenados, podemos hacer una representación gráfica de la siguiente manera:

www.elsolucionario.org



La distancia entre el punto $A(x_2, y_2)$ y $B(x_1, y_1)$ en un espacio bidimensional como el plano cartesiano, la podemos expresar como:

$$d_{BA} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

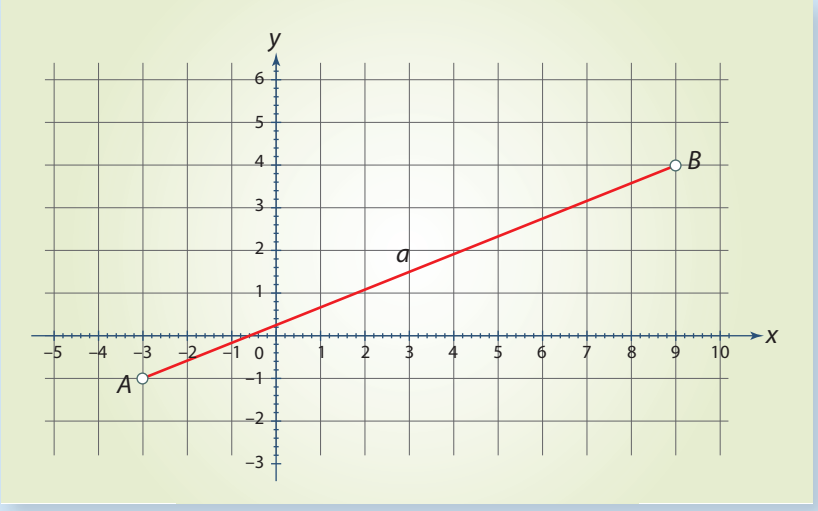
Para el cálculo de la distancia no dirigida entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ podemos asociarla con su posición en el plano, así relacionar a P_1 con el punto que esté a la izquierda en el plano y P_2 con el que esté a la derecha, aunque el valor que obtenemos de la aplicación de la fórmula de la distancia entre dos puntos no cambia si invertimos el orden de los números dentro de cada paréntesis.

Ejemplo 5

Obtén la distancia entre los puntos (–3, –1) y (9, 4).

Solución

Grafiquemos los puntos para ver su posición en el plano cartesiano



www.elsolucionario.org

Por la posición de los puntos en el plano, podemos considerar como punto inicial a $P_1(-3, -1)$ (por ser el que está más a la izquierda en el plano) y como P_2 (9, 4) (por estar a la derecha en el plano), así aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{[9-(-3)]^2 + [4-(-1)]^2}$$

$$= \sqrt{(9+3)^2 + (4+1)^2}$$

$$= \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{144 + 25}$$

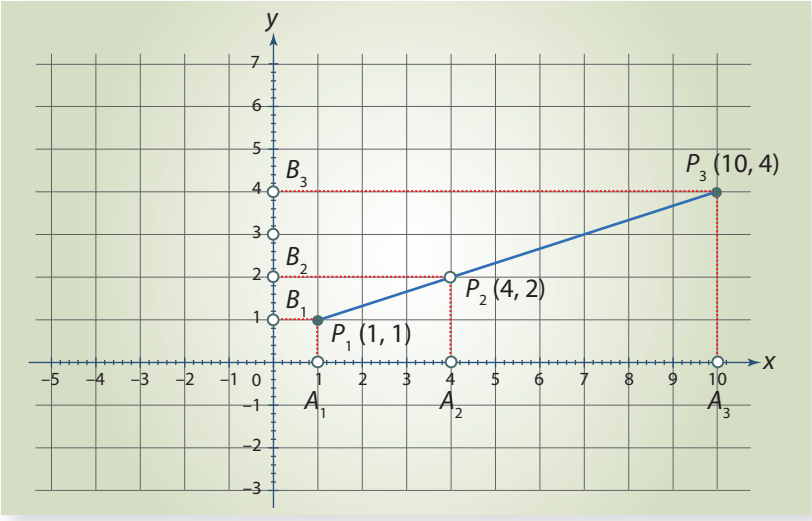
$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

División de un segmento en una razón dada

Veamos ahora un concepto de mucha aplicación en Geometría analítica, la división de un segmento en una razón dada, para estudiarlo utilicemos el teorema de Tales de la Geometría elemental.

Calcula las distancias indicadas y las razones solicitadas.



$B_1B_2 =$ _____ $A_1A_2 =$ _____ $P_1P_2 =$ _____

$B_2B_3 =$ _____ $A_2A_3 =$ _____ $P_2P_3 =$ _____

$\dfrac{B_1B_2}{B_2B_3} =$ _____ $\dfrac{A_1A_2}{A_2A_3} =$ _____ $\dfrac{P_1P_2}{P_2P_3} =$ _____

www.elsolucionario.org

Para obtener las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada, tracemos por los puntos P_1, P y P_2 perpendiculares a los ejes coordenados.

Por el teorema de Tales sabemos que las paralelas P_1A_1, PA y P_2A_2 cortan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y A_1A_2, por ello podemos expresar que:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}$$

Como todos los puntos en el eje x tienen la característica que su ordenada es 0, podemos calcular la longitud de los segmentos, tales como:

$$\overline{A_1A} = x - x_1$$

$$\overline{AA_2} = x_2 - x$$

Por sustitución:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Despejando x obtenemos:

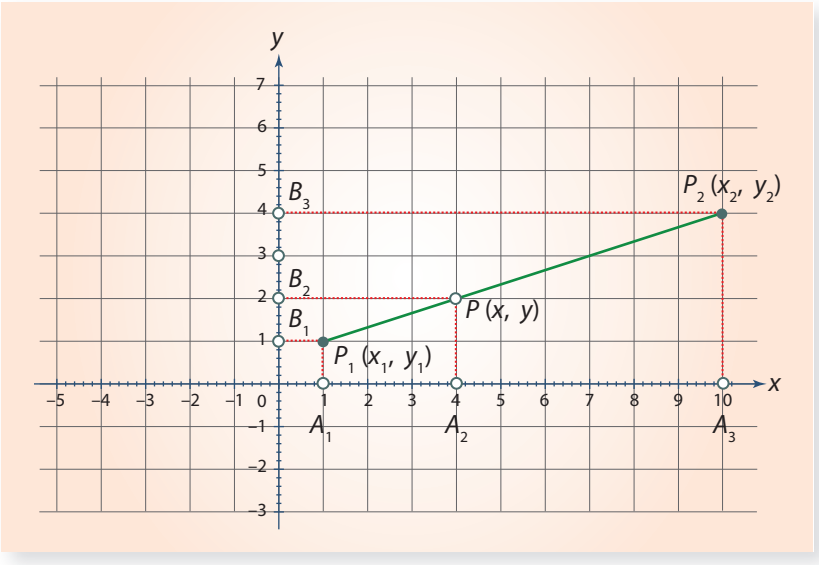
$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$rx_2 + x_1 = x + rx$$

$$x_1 + rx_2 = x(1 + r)$$

$$\frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = x$$



www.elsolucionario.org

De manera similar, podemos obtener el valor de la ordenada que divide a un segmento en una razón dada, obteniendo:

$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos del segmento P_1P_2, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ son:

$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + r x_2}{1 + r}, \frac{y_1 + r y_2}{1 + r} \right) \quad r \neq -1$$

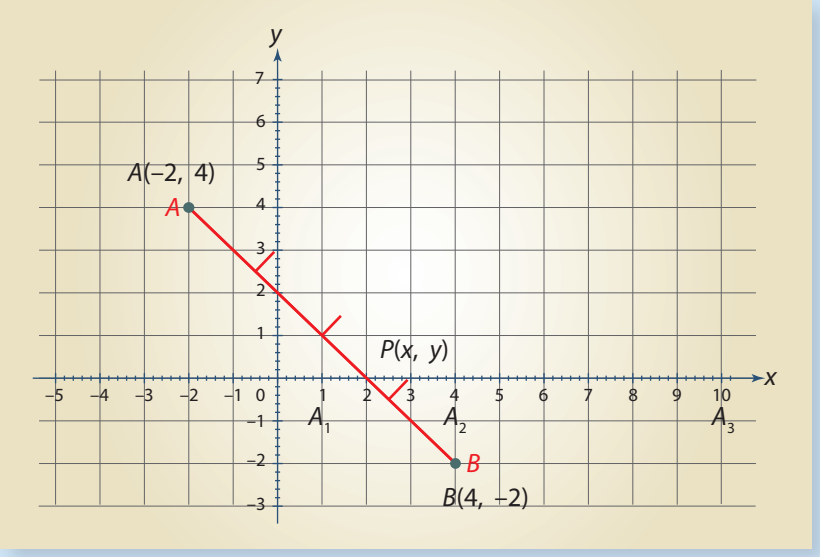
Cuando $r < 0$, el punto de división está fuera del segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ y si $r > 0$, $P(x, y)$ está entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

Ejemplo 6

Obtén las coordenadas del punto que divide al segmento que une los puntos $A(-2, 4)$ y $B(4, -2)$ en una razón $r = 3$.

Solución

Representamos los puntos A y B en el plano cartesiano para posicionar el punto que lo divide en una razón $r = 3 = \frac{3}{1}$.



Tomemos como el punto $P_1(x_1, y_1)$ o punto inicial al segmento que esté más a la izquierda en el plano y como punto $P_2(x_2, y_2)$ o punto final al segmento que esté más a la derecha en el plano.

Por el valor de la razón sabemos que si dividimos al segmento dado en cuatro segmentos iguales, el punto $P(x, y)$ es el situado a tres segmentos del inicio del segmento y sólo a uno del final del segmento dado.

Aplicando las fórmulas para calcular las coordenadas del punto de división obtenemos:

Continúa...

www.elsolucionario.org

$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \right)$$
$$= \left(\frac{-2 + (3)(4)}{1+3}, \frac{4 + (3)(-2)}{1+3} \right)$$
$$= \left(\frac{-2+12}{4}, \frac{4-6}{4} \right)$$
$$= \left(\frac{10}{4}, \frac{-2}{4} \right)$$
$$= \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

que son las coordenadas del punto de división a la razón dada.

Ejemplo 7

Lulú y Alberto, se montan en un sube y baja en el parque de su colonia. ¿A qué distancia del centro se tiene que sentar Alberto para que esté en equilibrio con Lulú si su peso es de 26 kg y el de Alberto de 34 kg, siendo el largo del sube y baja de 4 m y la altura del poste al que está sujeto de 0.8 m?

Solución

Para calcular la distancia a la que debe sentarse Alberto con respecto al poste que sirve como centro del sube y baja, consideraremos como punto inicial la posición de Lulú, dándole un punto coordenado; por ejemplo, $A(-2, 0.8)$, al centro del sube y baja lo asociamos con $B(0, 0.8)$ y a la nueva posición de Alberto con $C(x, y)$.

Para que estén en equilibrio en el sube y baja, podemos partir de:

$$26AB = 34BC$$
$$\frac{AB}{BC} = \frac{34}{26} = \frac{17}{13}$$

Sustituyendo en la fórmula del punto de división tenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

$$0 = \frac{-2 + \frac{17}{13}x}{1 + \frac{17}{13}} \qquad 0.8 = \frac{0.8 + \frac{17}{13}y}{1 + \frac{17}{13}}$$

www.elsolucionario.org

$$0 = \frac{-2 + \frac{17}{13}x}{\frac{30}{13}}$$

$$0\left(\frac{30}{13}\right) = -2 + \frac{17}{13}x$$

$$0 = -2 + \frac{17}{13}x$$

$$2 = \frac{17}{13}x$$

$$\frac{2}{\frac{17}{13}} = x$$

$$\frac{26}{17} = x$$

$$1.53 \approx x$$

$$0.8 = \frac{0.8 + \frac{17}{13}y}{\frac{30}{13}}$$

$$0.8\left(\frac{30}{13}\right) = 0.8 + \frac{17}{13}y$$

$$\frac{24}{13} = \frac{8}{10} + \frac{17}{13}y$$

$$\frac{24}{13} - \frac{8}{10} = \frac{17}{13}y$$

$$\frac{68}{65} = \frac{17}{13}y$$

$$\frac{\frac{68}{65}}{\frac{17}{13}} = y$$

$$\frac{4}{5} = y$$

$$0.8 = y$$

Por lo que Alberto se tendrá que sentar a 1.53 m del centro para que estén en equilibrio en el sube y baja.

Ejercicio 2

Verifica tu conocimiento sobre el tema, resolviendo los siguientes ejercicios. Comprueba tus respuestas comparando tu trabajo con el de tus compañeros.

1. Obtén las coordenadas del punto que divide al segmento que une cada pareja de puntos en la razón indicada en cada caso.

a) $P_1(2, -3)$, $P_2(7, 8)$ y $r = \frac{3}{5}$

b) $P_1(-6, -3)$, $P_2(2, -8)$ y $r = \frac{4}{3}$

c) $P_1(2, 3)$, $P_2(-7, -1)$ y $r = \frac{1}{3}$

d) $P_1(0, -5)$, $P_2(1, 6)$ y $r = 3 = \frac{3}{1}$

e) $P_1\left(\frac{3}{2}, -3\right)$, $P_2\left(-\frac{7}{3}, 8\right)$ y $r = \frac{2}{3}$

f) $P_1\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{7}\right)$, $P_2\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y $r = \frac{5}{6}$

g) $P_1(2, 4)$, $P_2(8, -5)$ y $r = -\frac{2}{3}$

h) $P_1(-6, 5)$, $P_2(3, 11)$ y $r = -\frac{3}{5}$

Continúa...

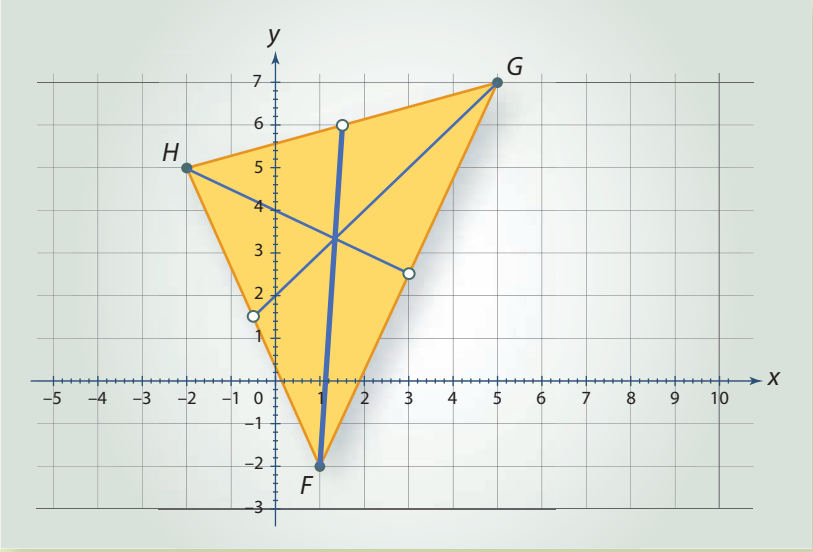
www.elsolucionario.org

2. $A(-2, 1)$ es el punto inicial de un segmento que es dividido por el punto $M(3, -2)$ en una razón $r = \frac{4}{3}$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto final?

3. Obtén las coordenadas del punto inicial de un segmento cuyo punto final es $G(3, 6)$ y que el punto $D(0, 1)$ lo divide en una razón $r = \frac{3}{7}$.

4. Un automóvil que avanza en línea recta se encuentra a 350 km del punto de partida y a 250 km de su punto de llegada. ¿Cuáles son las coordenadas del sitio en donde se encuentra, si las coordenadas del punto de partida son $G(3, 4)$ y $H(14, -2)$ las del punto de llegada?

5. Obtén las coordenadas del punto de intersección de las medianas del triángulo $F(1, -2)$, $G(5, 7)$ y $H(-2, 5)$, que está a $\frac{1}{3}$ de la distancia entre cada vértice y el punto medio del lado opuesto.



Forma equipo con cuatro personas, escriban a continuación tres situaciones cotidianas en las que apliquen la obtención de las coordenadas de un punto de división de un segmento en una razón dada, intercámbienlos con otro equipo y resuélvanlos, corroboren los resultados obtenidos con el equipo que planteó las situaciones.

1.

www.elsolucionario.org

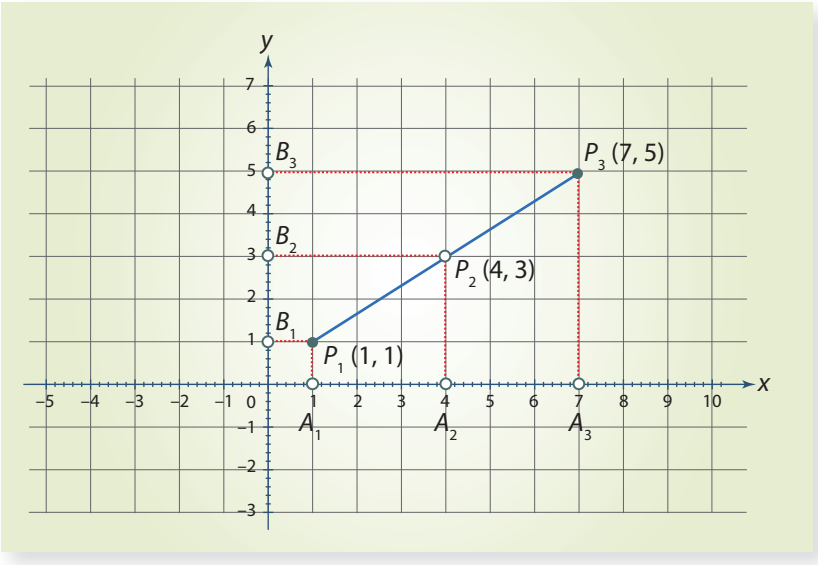
2.

3.

Punto medio

De manera similar, estudiemos la obtención de las coordenadas del punto medio de un segmento, como un caso particular de punto de división.

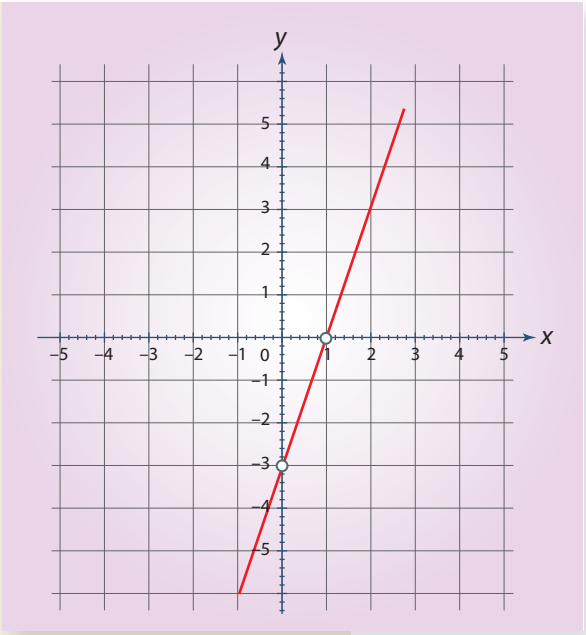
Calcula las distancias indicadas y las razones solicitadas.



B_1B_2 = _____ A_1A_2 = _____ P_1P_2 = _____

B_2B_3 = _____ A_2A_3 = _____ P_2P_3 = _____

www.elsolucionario.org



$\frac{B_1B_2}{B_2B_3} =$ _____ $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} =$ _____

$\frac{P_1P_2}{P_2P_3} =$ _____

Como puedes observar, el valor de la razón en todos los casos trabajados es _____

El punto medio de un segmento es aquel punto que está a la misma distancia de sus dos extremos, por lo que divide al segmento en dos partes iguales, como se muestra en el siguiente plano.

Como todos los puntos sobre el eje x tienen como característica que su ordenada es 0, podemos calcular la longitud de los segmentos como:

$$\overline{A_1A_2} = x - x_1$$

$$\overline{A_2A_3} = x_2 - x$$

Pero por construcción también tenemos que:

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$$

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Definimos la razón como el cociente de las longitudes de los segmentos obtenidos, así que:

$$r = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}$$

Por sustitución:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Despejando x obtenemos:

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$rx_2 + x_1 = x + rx$$

$$x_1 + rx_2 = x(1 + r)$$

$$\frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = x$$

Como $r = 1$, en el caso del punto medio:

$$x = \frac{x_1 + (1)x_2}{1 + (1)}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

www.elsolucionario.org

De manera similar, podemos obtener el valor de la ordenada que divide a un segmento en dos partes iguales, obteniendo:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas (x, y) de un punto P, llamado punto medio y que divide a este segmento en dos partes iguales, son:

$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 8

Obtén las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $A(-3, 4)$ y $B(5, -3)$.

Solución

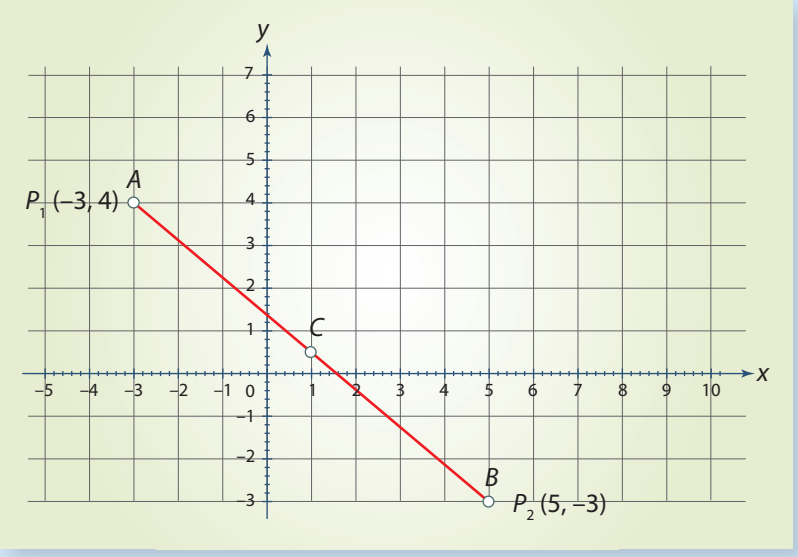
Sustituimos en las fórmulas para calcular las coordenadas del punto medio para obtener los valores.

$$P_m\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) = \left(\frac{5 + (-3)}{2}, \frac{-3 + 4}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{5 - 3}{2}, \frac{-3 + 4}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$P_m(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$



Ejemplo 9

$G(2, 4)$ es el punto medio de un segmento, en el que uno de sus extremos es $H(5, 7)$, ¿cuáles son las coordenadas del otro extremo?

Solución

En el gráfico vemos que el punto H está a la derecha de G, por lo que estamos buscando las coordenadas del punto inicial, por lo que para obtener las coordenadas buscadas, despejamos a x_1 y a y_1 en las fórmulas del punto medio.

Continúa...

www.elsolucionario.org

$$P_m\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)=(2, 4)$$

$$2=\frac{5+x_1}{2} \qquad 4=\frac{7+y_1}{2}$$

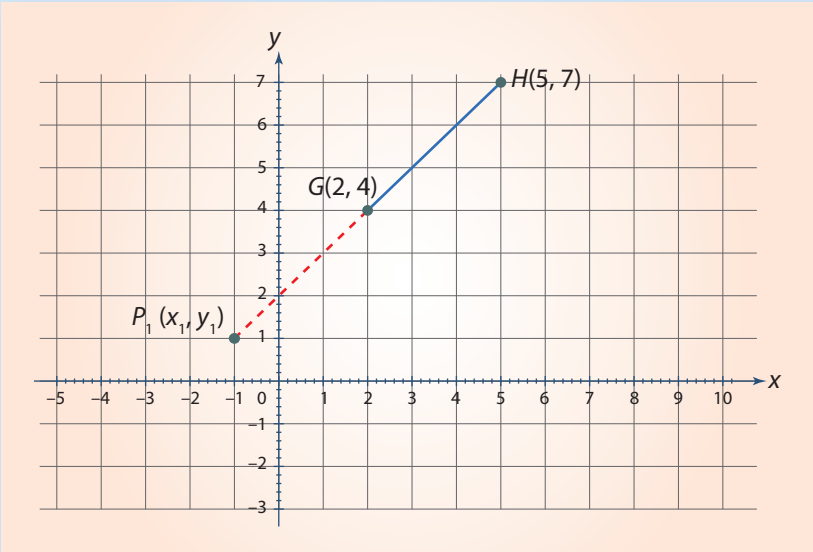
$$2(2) = 5 + x_1 \qquad 4(2) = 7 + y_1$$

$$4 = 5 + x_1 \qquad 8 = 7 + y_1$$

$$4 - 5 = x_1 \qquad 8 - 7 = y_1$$

$$-1 = x_1 \qquad 1 = y_1$$

El punto que buscamos es $P_1(-1, 1)$.

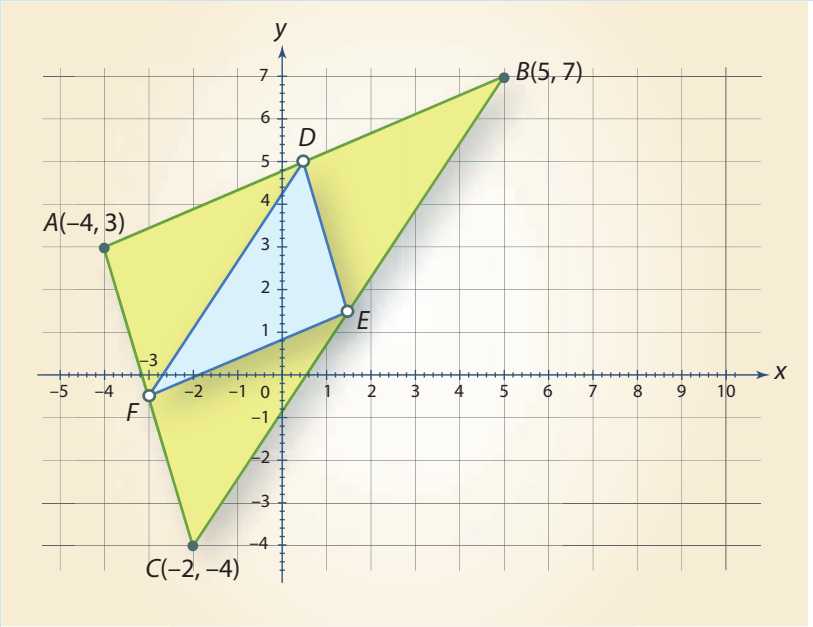


Ejemplo 10

Halla el perímetro del triángulo que se forma al unir los puntos medios de los lados del triángulo $A(-4, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(-2, -4)$.

Solución

Obtengamos las coordenadas de los puntos medios de los tres lados del triángulo dado y con ellos calculemos la longitud de cada lado para obtener el perímetro solicitado.



Puntos medios de los tres lados del triángulo:

$$Pm_{AB}\left(\frac{5+(-4)}{2}, \frac{7+3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, 5\right)$$

$$Pm_{CB}\left(\frac{5+(-2)}{2}, \frac{7+(-4)}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$Pm_{AC}\left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{3+(-4)}{2}\right)=\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$$

Calculemos ahora la longitud de cada uno de los lados del triángulo formado con los puntos medios, a los cuales llamaremos $D\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ $E\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $F\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$.

www.elsolucionario.org

$$d_{DE} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 5\right)^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{49}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{53}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{53}}{2}$$

$$d_{EF} = \sqrt{\left(-3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{81}{4} + 4}$$
$$= \sqrt{\frac{97}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{97}}{2}$$

$$d_{FD} = \sqrt{\left(-3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 5\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{121}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{170}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{170}}{2}$$

Por lo que el perímetro del triángulo es:

$$P = \frac{\sqrt{53}}{2} + \frac{\sqrt{97}}{2} + \frac{\sqrt{170}}{2}$$
$$\approx 3.64 + 4.924 + 6.519$$
$$\approx 15.083$$

Ejercicio 3

1. Obtén el punto medio de cada pareja.

a) $A(-2, 1)$ y $B(3, 7)$

b) $C(3, 7)$ y $D(6, -1)$

c) $E\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}\right)$ y $F\left(0, \frac{3}{4}\right)$

d) $G\left(-1, \frac{3}{10}\right)$ y $H(4, -5)$

Continúa...

www.elsolucionario.org

e) $I(0, 4)$ y $J(5, 2)$

f) $K(5, -4)$ y $L(11, 7)$

g) $M(1.2, -4.3)$ y $N(7.4, 11.5)$

h) $A\left(\frac{17}{3}, \frac{7}{4}\right)$ y $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

2. Obtén el extremo $B(x, y)$ de un segmento del que sabemos que su punto medio es $C(3, 4)$ con extremo $A(-2, -1)$.

3. La mediana en un triángulo es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto. Calcula la longitud de las tres medianas del triángulo $A(-5, 2)$, $B(4, 8)$ y $C(-1, -6)$.

4. $B(3, 5)$ es el punto medio del segmento que une los puntos $A(x, 9)$ y $B(8, y)$. Obtén los valores de x y y.

5. $M(x, 4)$ es el punto medio del segmento que une los puntos $F(-3, -2)$ y $H(4, 10)$. Obtén el valor de x.

6. Forma equipo con cuatro compañeros y discutan cómo resolver el siguiente problema.

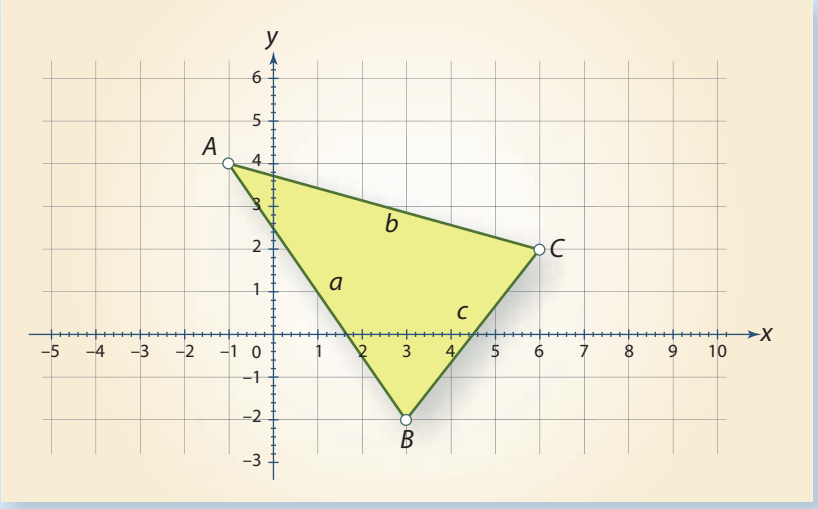
> Sean $D(-1, 3)$, $E(4, 0)$ y $F(2, -3)$ los puntos medios de un triángulo ABC, obtengan las coordenadas de uno de sus vértices.

Perímetros y áreas

A continuación se presentan algunos ejemplos del cálculo de perímetros y áreas de figuras geométricas.

Ejemplo 11

Obtén el perímetro de un triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-1, 4)$, $B(3, -2)$ y $C(6, 2)$.



Solución

Como el perímetro de una figura plana es la suma de la longitud de sus lados, debemos obtener la longitud de cada uno de los lados del triángulo dado.

Representemos la figura gráficamente antes de calcular la longitud de sus lados:

Distancia del lado AB:

$$d_{AB} = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (-2-4)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{16+36}$$

www.elsolucionario.org

$$= \sqrt{52}$$
$$= \sqrt{4 \times 13}$$
$$= 2\sqrt{13}$$

Distancia del lado *BC*:

$$d_{BC} = \sqrt{(6-3)^2 + [2-(-2)]^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$

Distancia del lado *CA*:

$$d_{CA} = \sqrt{[6-(-1)]^2 + (2-4)^2}$$
$$= \sqrt{7^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{49+4}$$
$$= \sqrt{53}$$

El perímetro del triángulo es:

$$P = 2\sqrt{13} + 5 + \sqrt{53}$$
$$\approx 7.21 + 5 + 7.28$$
$$\approx 19.49$$

Ejemplo 12

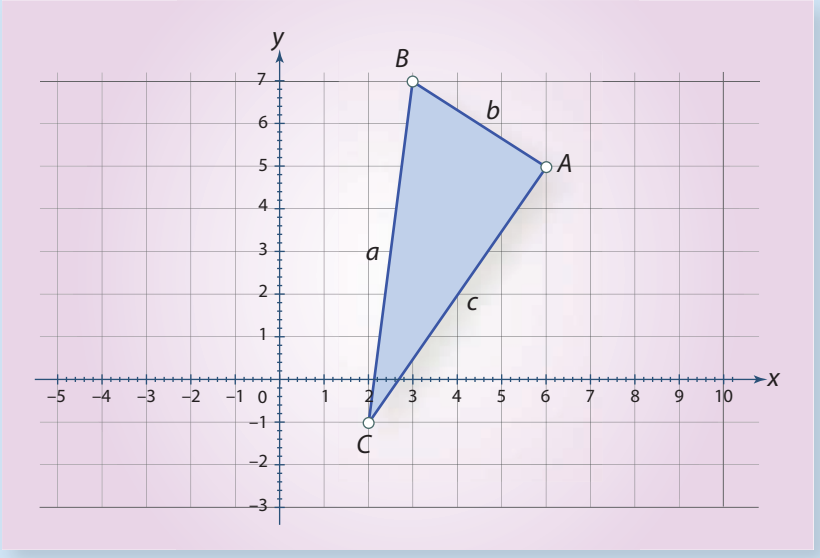
Demuestra que (6, 5), (3, 7) y (2, –1) son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución

Si los puntos dados son los vértices de un triángulo rectángulo, las longitudes de sus tres lados deben cumplir el teorema de Pitágoras, por lo que podemos calcular las tres longitudes y la mayor de ellas será la hipotenusa del triángulo.

Si las tres magnitudes obtenidas cumplen el teorema de Pitágoras, esto será razón suficiente para afirmar que el triángulo es rectángulo.

Representemos gráficamente la información que tenemos.



Continúa...

www.elsolucionario.org

Distancia del lado AB:

$$d_{AB} = \sqrt{(6-3)^2 + (5-7)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{9+4}$$
$$= \sqrt{13}$$

Distancia del lado BC:

$$d_{BC} = \sqrt{(3-2)^2 + [7-(-1)]^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + 8^2}$$
$$= \sqrt{1+64}$$
$$= \sqrt{65}$$

Distancia del lado CA:

$$d_{CA} = \sqrt{(6-2)^2 + [5-(-1)]^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{16+36}$$
$$= \sqrt{52}$$

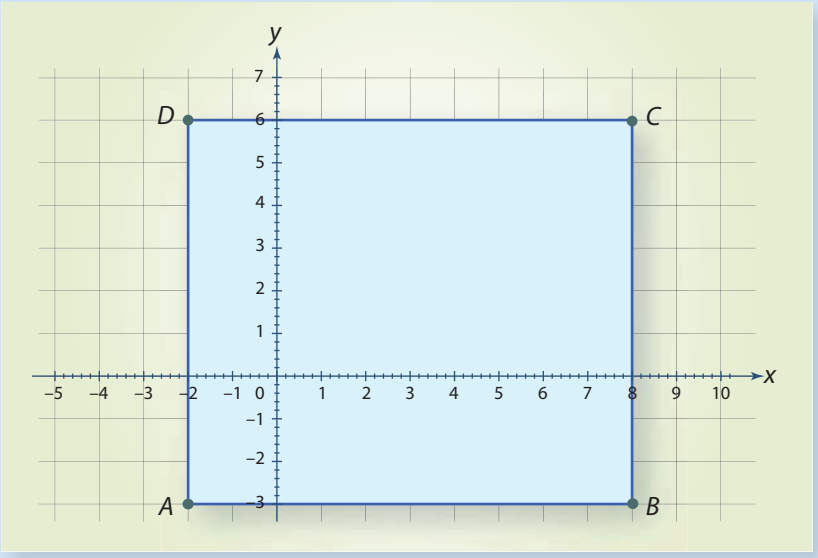
La mayor de las tres longitudes es $\sqrt{65}$ siendo ésta la que consideraremos como la hipotenusa del triángulo y las otras dos los catetos del triángulo dado. Veamos ahora si con estos datos se cumple el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\left(\sqrt{65}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{52}\right)^2$$
$$65 = 13 + 52$$
$$65 = 65$$

Con lo que queda demostrado que el triángulo dado es un triángulo rectángulo.

Ejemplo 13

Calcula el área de un rectángulo cuyos vértices son los puntos $A(-2, -3)$, $D(-2, 6)$, $C(8, 6)$ y $B(8, -3)$.



Solución

Localicemos los puntos dados para trazar el rectángulo indicado. Como el área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base por la longitud de su altura, obtenemos las distancias de una de las parejas de lados perpendiculares de cuyo producto obtendremos el área buscada.

www.elsolucionario.org

Calculamos la longitud de la base del rectángulo:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{[8-(-2)]^2+[-3-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{(8+2)^2+(-3+3)^2} \\ &= \sqrt{10^2+(0)^2} \\ &= \sqrt{100+0} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Como puedes ver en la gráfica, los puntos están alineados, por lo que la longitud de la altura también se puede calcular de otra manera:

$$\begin{aligned} d_{AD} &= \sqrt{[-2-(-2)]^2+[6-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{(-2+2)^2+(6+3)^2} \\ &= \sqrt{0^2+9^2} \\ &= \sqrt{0+81} \\ &= \sqrt{81} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Calculamos el área del rectángulo:

$$\begin{aligned} A &= b \times h \\ &= 10 \times 9 \\ &= 90 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Otra forma de calcular el área de un triángulo es mediante un medio del determinante que se forma con las coordenadas de los vértices ordenándolos en sentido contrario al de las manecillas de un reloj.

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

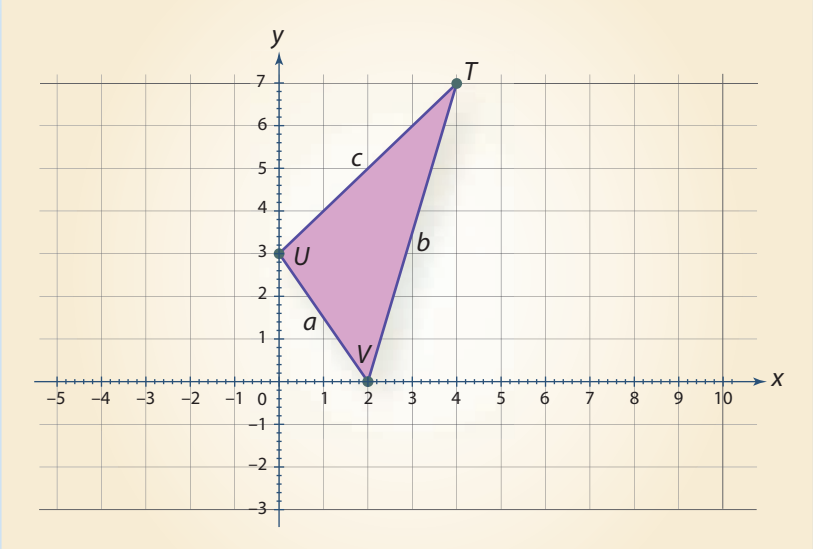
www.elsolucionario.org

Ejemplo 14

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $T(4, 7)$, $U(0, 3)$ y $V(2, 0)$.

Solución

Representamos gráficamente los puntos en un plano cartesiano, para determinar el punto inicial y el sentido de los subsecuentes, siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj.



En este caso iniciaremos con el vértice T, por lo que:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener el determinante repetiremos las dos primeras columnas de la derecha y obtenemos los productos de tres factores en forma descendente (diagonales principales) y le restamos los productos de tres factores en forma ascendente (diagonales secundarias):

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[(12+14+0)-(6+0+0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[26-6] \quad = \frac{1}{2}[20]$$

$$= 10 \text{ u}^2$$

Ejercicio 4

I. La siguiente serie de ejercicios te permitirá corroborar la comprensión que tiene sobre el tema, resuélvelos y compara tus respuestas con las de tus compañeros, verificando las que sean correctas.

1. Encuentra la distancia entre cada pareja de puntos.

a) $A(-2, 3)$, $B(0, 7)$ *b)* $F(-4, -1)$, $G(2, -6)$ *c)* $M(0, -4)$, $N(5, 3)$

d) $P(-5, 0)$, $Q(0, 4)$ *e)* $T(2, -5)$, $U(-1, 3)$ *f)* $C(-6, 0)$, $D(4, 0)$

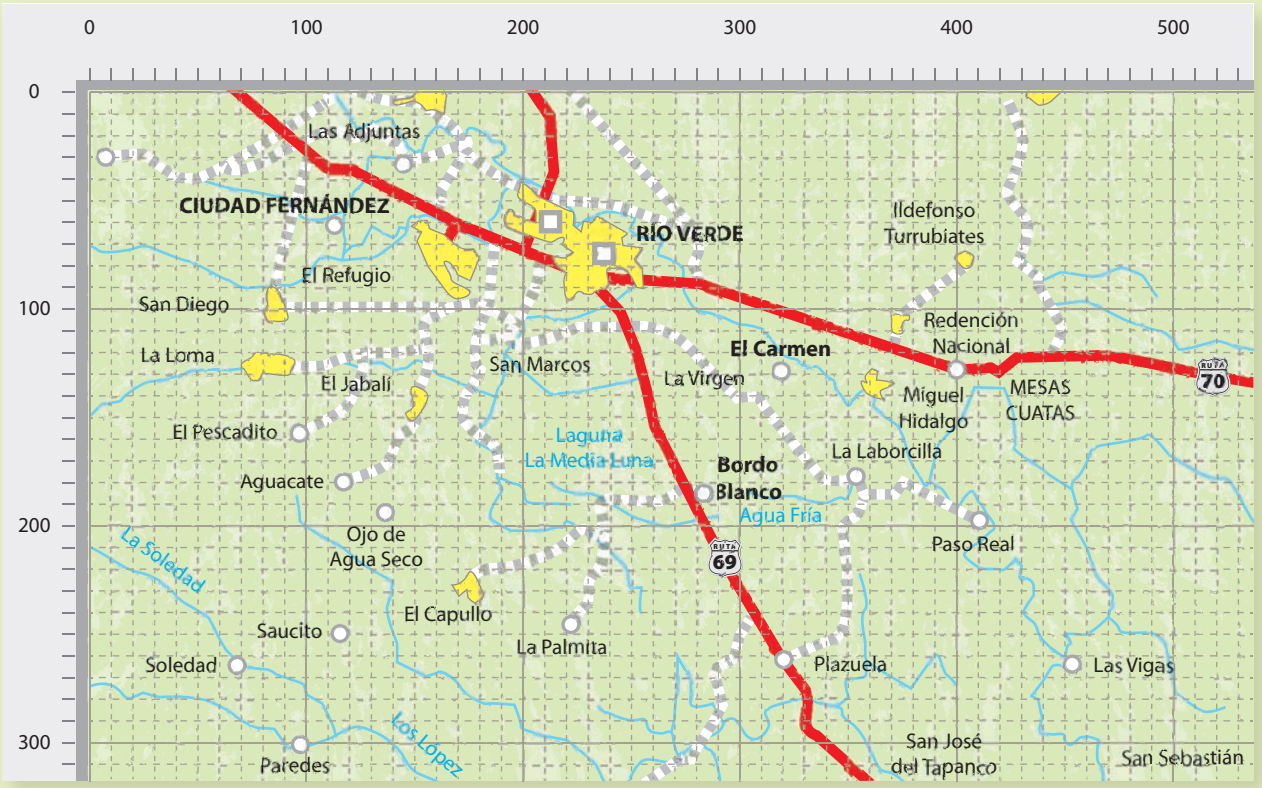
www.elsolucionario.org

2. Demuestra que los puntos $P(-5, 3)$, $Q(3, 2)$ y $R(-1, -4)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

3. Calcula el perímetro de un cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $G(-3, 1)$, $J(0, 7)$, $K(-8, -3)$ y $L(-5, 4)$.

4. Demuestra que los puntos $P(-2, 1)$, $Q(1, 5)$, $R(5, 2)$ y $S(2, -2)$ son los vértices de un cuadrado.

5. Calcula la distancia más corta entre El Carmen y Bordo Blanco, considerando las coordenadas del siguiente plano a escala.



6. Selecciona en el mismo mapa dos parejas de poblaciones y calcula la distancia más corta entre ellas.

a) Distancia entre _____ y _____

b) Distancia entre _____ y _____

7. Calcula el área de las siguientes figuras.

a) Triángulo cuyos vértices son los puntos (–3, 5), (0, –4) y (2, 7).

b) Cuadrilátero cuyos vértices son los puntos (0, 5), (–2, –1), (3, 1) y (5, 7).

Continúa...

www.elsolucionario.org

II. Forma equipo con cuatro personas y realicen las siguientes actividades con respecto al siguiente mapa.

1. Consideren las regletas laterales como los ejes coordenados *x* y *y*. Indica las coordenadas de cada una de las siguientes poblaciones.

a) Toluca de Lerdo (__, __)

b) Cuernavaca (__, __)

c) Morelia (__, __)

d) Cuautla (__, __)

e) Benito Juárez (__, __)

f) Ajuchitán (__, __)

2. Calcula la distancia en línea recta de Morelia a Tacámbaro.

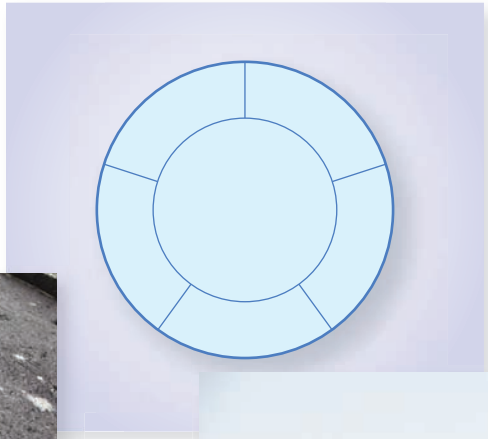
3. Calcula el área del triángulo que se forma tomando como vértices las coordenadas de las poblaciones de Huetamo, Taxco y Tenancingo.

1.2 SISTEMA POLAR

Luis, Andrea, Juan, Salvador, Rosa y Verónica están en el patio de la escuela jugando stop. Utiliza tu regla y un transportador para localizar la posición de cada uno de ellos en un momento determinado del juego.

La localización de cada persona se da por medio de un ángulo con lado inicial en una línea del centro a la derecha en el diagrama y una cantidad de pasos en la dirección del lado terminal del ángulo.

www.elsolucionario.org



Pon un punto de distinto color por la posición de cada persona, de acuerdo con la siguiente información. Luego, responde las preguntas.

Luis: 4 pasos a 40°	Rosa: 2 pasos a 150°
Juan: 3 pasos a 240°	Verónica: 4 pasos a 320°
Salvador: 1 paso a 110°	Andrea: 3 pasos a 70°

¿Qué dificultades tuvieron para hacer esta actividad? _____

_____

_____

_____

¿A qué acuerdos tuvieron que llegar para localizar a las seis personas? _____

_____

_____

_____

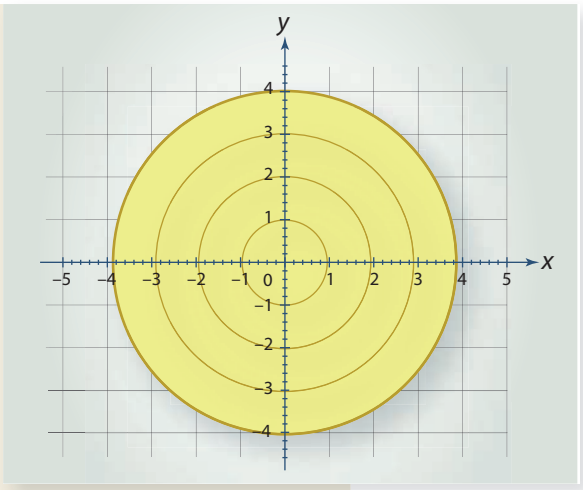
¿Todas las representaciones en el grupo fueron iguales? _____ ¿Qué se tiene que acordar para que todos obtengan la misma representación? _____

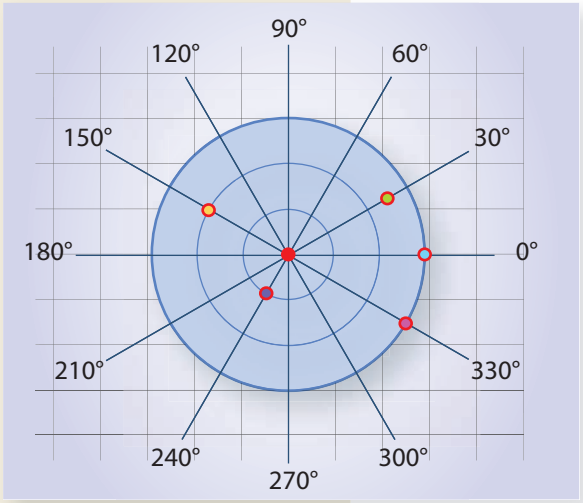
_____

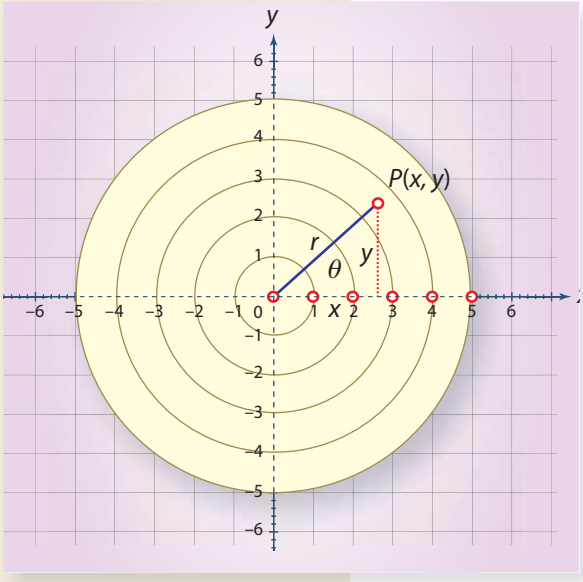
_____

_____

www.elsolucionario.org







La actividad anterior tiene su origen en una forma de representar puntos en un plano llamado **sistema de coordenadas polares**, para la cual utilizamos un conjunto de circunferencias concéntricas equidistantes una de otra como unidad de longitud y un ángulo para la dirección a la que está un punto con respecto al origen del plano que es un punto fijo.

Radio vector y ángulo polar

Cada punto de las coordenadas polares están dadas por una longitud y una dirección, por medio de un ángulo (r, θ). θ puede expresarse en grados sexagesimales o en radianes.

Para ubicar un punto en el plano polar, medimos primero el ángulo de dirección y después la longitud sobre las circunferencias concéntricas, en la misma dirección la longitud es positiva y en dirección contraria la longitud es negativa.

En el siguiente plano polar identifica con un punto de color distinto las coordenadas polares.

a) (2.5, 30°)

b) (–1, 60°)

c) (–3, 180°)

d) $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$

e) $\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$

Si sobreponemos a este plano otro cartesiano, podemos establecer una relación de equivalencia entre las coordenadas rectangulares o cartesianas y las coordenadas polares. Para ello, tracemos en un plano cartesiano un conjunto de circunferencias concéntricas y localicemos un punto en cualquier posición del plano, uniéndolo con el origen del plano cartesiano.

Como vemos en la figura, r es la distancia del punto al origen del plano y también es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Esta distancia se denomina **radio vector**.

Transformaciones del sistema coordenado polar al rectangular y viceversa

Para calcular la distancia del origen del plano al punto $P(x, y)$ utilizamos el teorema de Pitágoras.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

www.elsolucionario.org

Si queremos definir a x y y en términos de r y θ, podemos utilizar las funciones trigonométricas que estudiaste en cursos anteriores, así:

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos\theta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\tan\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$
$\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{r}$	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
$r \times \text{sen}\,\theta = y$	$r \times \cos\theta = x$	$\theta = \text{ang tan}\ \dfrac{y}{x}$

Un punto en coordenadas rectangulares o cartesianas $P(x, y)$ se expresa en coordenadas polares $P(r, \theta)$, definiendo a (x, y) en términos de (r, θ).

$$P(x, y) = P(r, \theta) = P\left(\sqrt{x^2 + y^2}\ , \text{ang tan}\ \frac{y}{x}\right)$$

Veamos algunos ejemplos de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa.

Ejemplo 15

Convierte las coordenadas rectangulares (2, 5) en coordenadas polares.

Solución

En el caso de las coordenadas polares no hay una respuesta única, ya que θ puede tomar muchos valores que en combinación con el valor único de r representen el mismo punto, así que obtenemos uno de todos los posibles valores de θ y el valor de r, y los indicamos como un par ordenado (r, θ).

$$P(2, 5) = P(r, \theta)$$

$$= P\left(\sqrt{x^2 + y^2}\ , \text{ang tan}\ \frac{y}{x}\right)$$

$$= P\left(\sqrt{2^2 + 5^2}\ , \text{ang tan}\ \frac{5}{2}\right)$$

$$= P\left(\sqrt{4 + 25}\ , 68.2°\right)$$

$$= P\left(\sqrt{29}\ , 68°12'\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{en grados sexagesimales}$$

$$= P\left(\sqrt{29}\ , 1.19\ \text{rad}\right)$$

El valor de θ se puede expresar en grados o radianes.

$$\frac{G}{180°} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{68.2°}{180°} = \frac{R}{\pi}$$

$$R = \frac{68.2 \times \pi}{180}$$

$$= \frac{68.2}{180}\pi\ \text{rad}$$

$$R = 1.19\ \text{rad}$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 16

Convierte a coordenadas polares el punto cuyas coordenadas cartesianas son $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$.

Solución

Por la combinación de signos en las coordenadas del punto dado, sabemos que éste está en el segundo cuadrante, por lo que uno de los posibles valores de θ es:

$$\theta = 180° - \text{ang tan } \frac{y}{x}$$

Calculemos uno de los valores posibles para r y θ:

$$P\left(-\sqrt{3}, 1\right) = P(r, \theta)$$

$$= P\left(\sqrt{x^2 + y^2}, 180° - \text{ang tan } \frac{y}{x}\right)$$

$$= P\left(\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}, 180° - \text{ang tan } \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= P\left(\sqrt{3+1}, 180° - 30°\right)$$

$$= P\left(\sqrt{4}, 150°\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ grados sexagesimales}$$

$$= P(2, 150°)$$

$$= P\left(2, \frac{5}{6}\pi \text{ rad}\right)$$

$$\frac{G}{180°} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{150°}{180°} = \frac{R}{\pi}$$

$$R = \frac{150 \times \pi}{180}$$

$$= \frac{15}{18}\pi \text{ rad}$$

$$R = \frac{5}{6}\pi \text{ rad}$$

Ejemplo 17

Expresa en coordenadas rectangulares el punto $A\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ descrito en coordenadas polares.

Solución

Por la combinación de signos de las coordenadas del punto, sabemos que es un punto de primer cuadrante.

$$A(r, \theta) = A(x, y)$$

$$= (r \cos\theta, r \text{ sen } \theta)$$

$$= \left(5 \cos\frac{\pi}{4}, 5 \text{ sen } \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (5 \times 0.7071, 5 \times 0.7071)$$

$$= (3.5355, 3.5355)$$

www.elsolucionario.org

Ejercicio 5

1. Localiza en el plano polar los siguientes puntos dados en coordenadas polares.

a) (–3, 45°) *b*) (4, 210°) *c*) (–5, –60°)

d) $\left(-1, \frac{4\pi}{3}\right)$ *e*) $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ *f*) $\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$

2. Indica cada uno de los siguientes puntos en coordenadas polares.

a) (–2, 3) *b*) (0, 5) *c*) (3, 1)

d) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$ *e*) (–3, 0) *f*) $\left(-2, \sqrt{5}\right)$

3. Obtén las coordenadas rectangulares para cada uno de los siguientes puntos en coordenadas polares.

a) (2, 135°) *b*) $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ *c*) $\left(\frac{5}{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$

d) $\left(4.5, \frac{10\pi}{3}\right)$ *e*) $\left(-\frac{5}{2}, 65°\right)$ *f*) (6, 225°)

Hay ocasiones en las que es conveniente expresar una ecuación rectangular en ecuación polar.

Ejemplo 18

Encuentra la ecuación polar que tiene la misma gráfica que $3x - 2y + 4 = 0$.

Solución

Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación dada, y despejamos r.

$$3x - 2y + 4 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$3(r\cos\theta) - 2(r\,\text{sen}\,\theta) + 4 = 0 \quad \text{Por sustitución}$$
$$r(3\cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta) + 4 = 0 \quad \text{Factorizando}$$
$$r(3\cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta) = -4 \quad \text{Despejando } r$$
$$r = -\frac{4}{3\cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta} \quad \text{Ecuación polar buscada}$$

Ejemplo 19

Encuentra la ecuación polar que tiene la misma gráfica que la ecuación $x^2 - 6y - 9 = 0$

Continúa...

www.elsolucionario.org

Solución

Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación dada; luego, despejamos r.

$$x^2 - 6y - 9 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$(r\cos\theta)^2 - 6(r\,\text{sen}\,\theta) - 9 = 0 \quad \text{Por sustitución}$$
$$r^2\cos^2\theta - 6r\,\text{sen}\,\theta - 9 = 0 \quad \text{Operaciones indicadas}$$
$$r^2(1 - \text{sen}^2\theta) - 6r\,\text{sen}\,\theta - 9 = 0 \quad \text{Identidad trigonométrica}$$
$$r^2 - r^2\,\text{sen}^2\theta - 6r\,\text{sen}\,\theta - 9 = 0 \quad \text{Operaciones indicadas}$$
$$r^2 - (r^2\,\text{sen}^2\theta + 6r\,\text{sen}\,\theta + 9) = 0 \quad \text{Agrupando términos}$$
$$r^2 - (r\,\text{sen}\,\theta + 3)^2 = 0 \quad \text{Factorizando TCP}$$
$$r^2 = (r\,\text{sen}\,\theta + 3)^2 \quad \text{Despejando a } r$$
$$r = \pm(r\,\text{sen}\,\theta + 3) \quad \text{Despejando } r$$

Como la igualdad establece dos posibles resultados:

$$r = -(r\,\text{sen}\,\theta + 3) \qquad \text{o} \qquad r = r\,\text{sen}\,\theta + 3$$
$$r = -r\,\text{sen}\,\theta - 3 \qquad r - r\,\text{sen}\,\theta = 3$$
$$r + r\,\text{sen}\,\theta = -3 \qquad r(1 - \text{sen}\,\theta) = 3$$
$$r(1 + \text{sen}\,\theta) = -3 \qquad r = \frac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$$
$$r = -\frac{3}{1 + \text{sen}\,\theta}$$

Donde las dos ecuaciones son equivalentes y por eso representan el mismo conjunto de puntos, así que la ecuación que se busca se puede representar de la siguiente manera:

$$r = \frac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$$

Ejercicio 6

1. Encuentra una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada a continuación.

a) $y = 5$ *b)* $2x - 3y + 2 = 0$ *c)* $y = 4x$

d) $y^2 = -4x + 4$ *e)* $x^2 - 12y - 36 = 0$ *f)* $x^2 = 6y + 9$

g) $x^2 + y^2 = 25$ *h)* $x^2 - y^2 = 4$ *i)* $x^2 - 2y = 1$

2. Forma equipo con cuatro compañeros y discutan cómo se puede encontrar la ecuación cartesiana o rectangular que tenga la misma gráfica que una ecuación polar.

www.elsolucionario.org

Comprueben sus observaciones encontrando la ecuación rectangular que tenga la misma gráfica:

a) $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$ *b*) $r = \dfrac{2}{1+3\cos\theta}$

LECTURA SUGERIDA

Revisa la siguiente lectura en Internet de David Yagué: ¿El mundo no es como en los mapas?

http://www.20minutos.es/noticia/633109/0/mundo/aparece/mapas/

Actividades a realizar

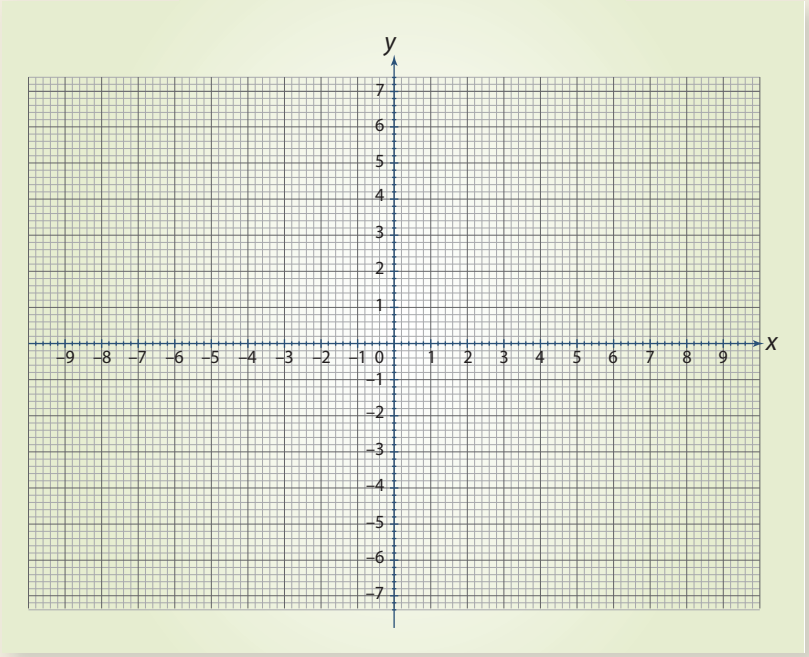
1. Lean de manera individual la lectura propuesta e indiquen qué tanto sabían antes sobre el tema de elaboración de mapas de la Tierra.
2. Contesten las siguientes preguntas:
   - *a*) ¿Es Groenlandia tan grande como África y Alaska, más grande que México como lo indican algunos mapas?
   - *b*) ¿Qué forma tiene realmente la Tierra?
   - *c*) ¿Es posible representar a la Tierra en dos dimensiones sin distorsiones?
   - *d*) ¿En qué consiste la proyección de Mercator?
   - *e*) Según Peters, ¿cuáles eran las bondades de su proyección (Gall-Peters) y cuáles los problemas de la proyección de Mercator?
   - *f*) ¿Qué significa "un buen mapa" para un cartógrafo?
   - *g*) ¿A qué estaba destinada la proyección de Mercator?
   - *h*) ¿Por qué se dice en la lectura que los mapas son ideología?
   - *i*) Menciona algunas otras proyecciones que usan para representar a la Tierra y quiénes las usan.
   - *j*) ¿En qué consisten los MDT?
   - *k*) ¿Qué proyección utiliza Google Maps?
   - *l*) ¿Por qué el autor considera a Mátrix como una película muy cartográfica?
3. Investiguen las características de otras proyecciones importantes que se usan para representar a la Tierra.
4. Reúnanse en equipos y comenten sobre las bondades y los problemas de las principales proyecciones que se usan para representar a la Tierra.
5. Exponga cada equipo ante sus demás compañeros lo investigado en el punto 3 y comentado en el punto 4 para una proyección.

www.elsolucionario.org

Cierre

Recuperación de información

Traza en el plano cartesiano un triángulo cuyos vértices sean $A(8, 5)$, $B(-1, 8)$ y $C(4, -7)$. Luego, contesta las preguntas y realiza lo que se indica, para ello escribe en los paréntesis el inciso correspondiente.



1. ¿Qué tipo de triángulo es? . . . . . ( )

a) Isósceles *b*) Equilátero *c*) Acutángulo *d*) Rectángulo

2. ¿Cuál es su perímetro? . . . . . ( )

a) 42.3 u *b*) 26.92 u *c*) 37.95 u *d*) 27.6 u

3. ¿Cuál es el área del triángulo? . . . . . ( )

a) 60 u^2 *b*) 240 u^2 *c*) 120 u^2 *d*) 56 u^2

4. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del lado *CB*? . . . . . ( )

a) (6, –1) *b*) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *c*) (–1, 6) *d*) $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$

5. ¿Cuál es la longitud de la mediana trazada desde *C*? . . . . . ( )

a) 13.5 u *b*) 10.3 u *c*) 7.9 u *d*) 14.6 u

www.elsolucionario.org

6. Halla las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide el segmento de recta que une los puntos $A(-8, 4)$ y $B(4, 12)$ en la razón $r = \frac{1}{2}$ . . . . . ( )

a) $\left(\frac{20}{3}, 4\right)$ *b)* $\left(-4, \frac{10}{3}\right)$ *c)* $\left(-4, \frac{20}{3}\right)$ *d)* $\left(4, \frac{20}{3}\right)$

7. Convierte las coordenadas polares $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ en coordenadas rectangulares. ( )

a) $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ *b)* $\left(1, \sqrt{3}\right)$ *c)* $\left(\sqrt{3}, 2\right)$ *d)* $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$

8. Convierte las coordenadas del vértice $A(5, 8)$ en coordenadas polares. . . . ( )

a) $\left(\sqrt{89}, 58°\right)$ *b)* $\left(\sqrt{59}, 58°\right)$ *c)* $\left(-\sqrt{89}, 128°\right)$ *d)* $\left(-\sqrt{59}, 128°\right)$

9. Convierte las coordenadas polares del punto $H\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$ en coordenadas rectangulares . . . . . ( )

a) (2.5, 8.33) *b)* (–2.5, –8.33) *c)* (8.33, 2.5) *d)* (2.5, –4.33)

10. ¿Es la ecuación polar que tiene la misma gráfica que $3x - y + 4 = 0$? . . . . . ( )

a) $r = -\frac{4}{3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$ *c)* $r = \frac{1}{3\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

b) $r = \frac{4}{3\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$ *d)* $r = -\frac{1}{3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

11. Elabora un formulario con los elementos estudiados hasta ahora

www.elsolucionario.org

Autoevaluación

Una forma en la que podemos evaluar nuestro desempeño al realizar una actividad, es revisar las acciones y actitudes que tenemos hacia la tarea que tenemos que desarrollar.

El siguiente cuestionario, tiene la finalidad de proporcionarte una guía para que revises críticamente tu participación en la actividad académica desarrollada y dado el caso, puedas hacer las correcciones necesarias.

Revisa tu desempeño en el aula y el trabajo en equipo con respecto a cada una de las acciones que se te proponen colocando una *X* en la columna que mejor describa tu participación de acuerdo al criterio indicado en el cuadro.

Aspecto a evaluar		Acciones	Criterios			
			Nunca	Casi nunca	La mayoría de las veces	Siempre
Forma de trabajo	Disciplina	Puse atención al profesor, seguí sus indicaciones y actué con respeto hacia él y mis compañeros.				
	Presentación	Elaboré mis trabajos con letra legible o usando herramientas computacionales (procesador de textos, hoja de cálculo, programa de presentaciones, etcétera).				
	Redacción	Redacté mis trabajos de forma que se entendieran sin problema mis argumentos y procedimientos y sin faltas de ortografía.				
	Orden	Presenté mis trabajos de manera ordenada sin saltarme pasos en las fechas indicadas.				
Trabajo en clase	Lectura de unidad	Leí la lectura de unidad y realicé las actividades indicadas en ella.				
	Participación en clase	Participé activamente en las clases y pregunté a mi profesor mis dudas.				
	Trabajo en equipo	Colaboré en las actividades que se realizaron por equipo.				
Trabajo fuera del aula	Estudio previo	Leí las secciones correspondientes del libro antes de la presentación de un tema nuevo por parte del maestro.				
	Tareas asignadas	Resolví los ejercicios propuestos y realicé las tareas y actividades extraclase asignadas por el profesor.				
	Investigación	Realicé las investigaciones indicadas en el libro y por el profesor.				

www.elsolucionario.org

Autoevaluación disciplinar

Marca con una *X* el dominio que lograste sobre cada uno de los temas estudiados en la unidad y establece tu compromiso para mejorar dado el caso.

Elemento		Dominio	No dominio	Intenciones
Antecedentes históricos				
	Definición de Geometría analítica			
	Evolución histórica de la Geometría analítica.			
Sistema rectangular				
	Localizo puntos en el plano cartesiano.			
	Calculo la distancia entre dos puntos coordenados.			
	Utilizo la distancia entre dos puntos como herramienta para el cálculo de perímetros y áreas de figuras regulares.			
	Obtengo las coordenadas del punto de división de un segmento en una razón dada.			
	Entiendo al punto medio como un caso especial de la división de un segmento en una razón dada.			
	Aplico y distingo en situaciones de mi entorno los conceptos estudiados.			
Sistema Polar				
	Localizo un punto dado en coordenadas polares en el plano polar.			
	Puedo convertir las coordenadas cartesianas con las que está representado un punto en coordenadas polares.			
	Convierto las coordenadas polares con las que está representado un punto dado en coordenadas rectangulares.			
	Puedo obtener la ecuación polar que tiene la misma gráfica que una ecuación rectangular lineal o cuadrática.			

www.elsolucionario.org

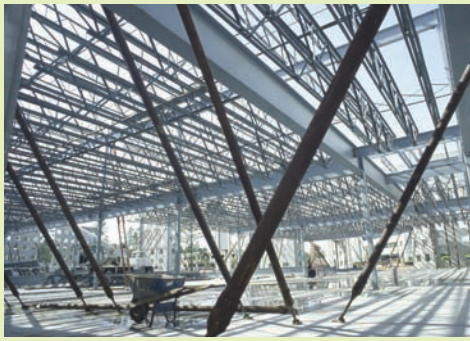
2 Unidad

LUGARES GEOMÉTRICOS. LA RECTA

www.ejercicios-resueltos.org

Competencias a desarrollar:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.



Contenido para aprender

2.1 Pendiente y ángulo de inclinación

2.2 Formas de la ecuación de una recta y sus transformaciones

2.3 Intersección de rectas

2.4 Relación entre rectas

2.5 Rectas notables del triángulo

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Escribe en el paréntesis el inciso que corresponda a la respuesta correcta.

1. Distancia entre los puntos $A(4, -9)$ y $B(7, -5)$ ( )

a) 5 *b*) $\sqrt{153}$ *c*) $\sqrt{265}$ *d*) 4

2. Valor que puede tomar x para que la distancia entre los puntos $C(x, 2)$ y $D(5, 14)$ sea igual a 13. ( )

a) 18 *b*) –8 *c*) 2 *d*) 0

3. Punto que divide el segmento que une los puntos $E(4, -2)$ y $F(13, 7)$ en una razón $r = 0.8$. ( )

a) (2, 8) *b*) $\left(\frac{4}{3}, \frac{31}{3}\right)$ *c*) (8, 2) *d*) $\left(\frac{68}{5}, 4\right)$

www.elsolucionario.org

4. Dado $R(3, 9)$ determina las coordenadas del punto Q si su abscisa es la tercera parte de la ordenada de R y su ordenada es el doble de la abscisa de R. ( )

a) (1, 18) *b*) (6, 3) *c*) (3, 6) *d*) (18, 1)

5. Área del triángulo cuyos vértices son $A(1, 1)$, $B(8, 8)$, $C(1, 8)$. ( )

a) 49 u^2 *b*) 24.5 u^2 *c*) 64 u^2 *d*) 12.25 u^2

6. Perímetro del triángulo del inciso anterior. ( )

a) 21 u *b*) 23.9 u *c*) 24.5 u *d*) 25 u

7. Punto medio del segmento de recta cuyos extremos son $A(-8, -4)$ y $B(2, 6)$. ( )

a) (–3, 1) *b*) (5, 5) *c*) (–6, 2) *d*) (–4, –2)

8. Convierte a coordenadas rectangulares el punto en coordenadas polares $M(\sqrt{2}, 0.75\pi)$. ( )

a) (–1, 1) *b*) (1, 1) *c*) (1, –1) *d*) (–1, .1)

9. Convierte a coordenadas polares el punto en coordenadas rectangulares $N(-1, \sqrt{3})$. ( )

a) (2, 150°) *b*) (2, 120°) *c*) (2, 300°) *d*) (2, 330°)

10. ¿Qué representa la ecuación $r = \dfrac{c}{a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta}$? ( )

a) Elipse *b*) Circunferencia *c*) Recta *d*) Parábola

Tema integrador

Secuencia didáctica

Apertura

Depreciación

Quizá en pláticas con personas mayores o en noticieros habrás escuchado expresiones tales como:

1. *"Hay que cambiar la computadora porque ya es **obsoleta**".*
2. *"Quiero vender el automóvil antes de que se **deprecie** más".*

www.elsolucionario.org

3. *"Los economistas sugieren una* ***devaluación*** *de la moneda para mejorar la competitividad del país".*

4. *"En los inmuebles, la* ***depreciación*** *tarda más en llegar".*

Las palabras obsoleto, depreciación y devaluación tienen que ver con la pérdida de utilidad o el valor de un artículo o moneda debido a distintas situaciones, especialmente la de depreciación.

La depreciación es una disminución del valor o del precio de algo. Por ejemplo, este cambio de valor se detecta a partir de la comparación del precio de venta de un artículo y el precio de fabricación. Por lo general, la depreciación de un artículo se origina por tres causas:

1. El desgaste que le genera su uso.
2. La obsolencia.
3. El paso del tiempo.

Por ejemplo, un automóvil se deprecia a medida que aumenta su kilometraje, ya que el uso afecta el rendimiento y el estado de sus partes. Una computadora se

www.elsolucionario.org

vuelve obsoleta cuando salen al mercado nuevos modelos que ofrecen un funcionamiento más eficiente. Una casa baja su precio de venta cuando es muy antigua y en ocasiones se vende mejor como terreno.

Para la economía, la depreciación puede asociarse a una devaluación o disminución del valor nominal de una moneda frente a una divisa extranjera. Esto puede producirse por el incremento de la demanda de la divisa extranjera y una disminución de la demanda de la moneda local.

Considera la siguiente información acerca de la depreciación de un automóvil y haz su representación gráfica. Después, realiza las diferentes actividades de la secuencia didáctica.

"Agustín puso su automóvil a la venta en 2009 en $64 850; como no lo vendió, tres años después lo intentó nuevamente pidiendo por él $57 770."

En esta situación te puedes plantear diferentes preguntas, por ejemplo:

1. ¿Cuánto disminuye por año el precio de venta del automóvil de Agustín?
2. De continuar este comportamiento, ¿cuánto valdrá su automóvil dentro de 10 años a partir de 2012?
3. Suponiendo que el modelo del automóvil de Agustín sea 2005 y que cada año perdiera el mismo valor por el uso y desgaste de sus partes. ¿Cuál fue el precio que pagó por la unidad nueva?
4. Como sería la gráfica de este comportamiento de depreciación, trázala.
5. ¿Se podría generar un modelo que represente la forma de obtener el precio de la unidad en función de los años de uso? ¿Cuál sería ese modelo?

Apertura	Desarrollo	Cierre
• Forma equipo con cuatro compañeros más. • Lean con atención el texto proporcionado. • Comenten entre ustedes sus experiencias cotidianas con respecto a la compra y venta de automóviles. • Investiguen cómo se determina el valor de venta de un automóvil usado. • ¿Qué otras situaciones pueden tener un comportamiento lineal o que al graficarlo se obtenga una línea recta? • Investiguen cómo se determina el valor de venta de un automóvil usado.	• Investiguen los siguientes conceptos: *a*) Definición analítica de la línea recta. *b*) Formas de representar la ecuación de la línea recta. *c*) Elementos característicos de la línea recta. • Investiguen dos aplicaciones en procesos económicos, administrativos o sociales de la línea recta.	• Escriban en su cuaderno el significado etimológico de la palabra Geometría. • Comenten qué importancia tienen los sistemas de representación de puntos en un plano en nuestra vida cotidiana. • Escriban en su cuaderno los elementos que investigaron. • ¿Qué otras situaciones pueden tener un comportamiento lineal o que al graficarlo se obtenga una línea recta?

www.elsolucionario.org

Rúbrica

Categoría	Excelente	Bien	Regular	Oportunidad de desarrollo
Terminología y notación	Utiliza adecuadamente los conceptos de pendiente, ángulo de inclinación y las diferentes formas de presentar la ecuación de una línea recta, empleando una notación correcta y permitiendo que la lectura de sus documentos sean de fácil entendimiento.	La utilización de conceptos como pendiente, ángulo de inclinación y las diferentes formas de presentar la ecuación de una línea recta y su notación es correcta en la mayoría de los documentos que produce, sin embargo, su lectura no siempre es fácil de entender.	No hace uso correcto de los conceptos de pendiente, ángulo de inclinación y las diferentes formas de presentar la ecuación de una línea recta, su notación no es muy eficiente, pues dificulta la lectura de los documentos que produce.	Hay poco uso o uso inapropiado de los conceptos de pendiente, ángulo de inclinación y las diferentes formas de presentar la ecuación de una línea recta, y su notación, en los documentos que produce hace que éstos sean parciales o incompletos.
Errores matemáticos	Por lo menos 90% de los procesos y sus soluciones no contienen errores matemáticos.	De 80 a 89% de los procesos y sus resultados no presentan errores matemáticos.	Entre 60 y 79% de los procesos y los resultados que presenta en sus documentos están libres de errores matemáticos.	Más de 40% de los procesos y las soluciones contienen errores matemáticos.
Orden y organización	Presenta todos sus documentos de manera ordenada, clara y organizada, lo cual facilita su lectura.	La mayoría de sus documentos están redactados en forma clara y organizada siendo fáciles de leer.	En la mayoría de sus trabajos se detecta una falta de orden o de claridad, lo cual dificulta su lectura.	Los trabajos que presenta se ven descuidados y/o desorganizados. Es difícil saber la forma en que procesa la información y cómo se relaciona ésta.
Comunicación de resultados	Su comunicación es fluida y adecuada al contexto	Su comunicación es adecuada con respecto al tema, pero le falta fluidez.	Utiliza expresiones cotidianas inadecuadas al comunicarse.	Presenta oportunidades para aumentar léxico y fluidez.

www.elsolucionario.org

Propósito

Que los estudiantes interpreten, argumenten, comuniquen y resuelvan diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos que incluyan la representación de rectas en el plano cartesiano, para la resolución de situaciones contextualizadas de tipo social, natural, científico y tecnológico, participando de manera responsable en la solución de problemas de su entorno, favoreciendo el desarrollo de las competencias propias de la disciplina y las genéricas contempladas en el marco común curricular.

¿Qué aprenderás?

- A identificar los elementos característicos de la línea recta como son su pendiente y los puntos por donde pasa en un plano, utilizando diferentes formas de representación.
- A obtener la pendiente, el ángulo de inclinación de una recta, su ecuación y gráfica, aplicándolos a ejercicios y problemas.
- A obtener dada la gráfica de una recta su ecuación y viceversa.
- A obtener el punto de intersección de dos o más rectas dadas, aplicándolo a la resolución de ejercicios y problemas geométricos y contextualizados.

¿Para qué te servirá?

El aprendizaje de las representaciones de la línea recta es útil para aplicarlo en el modelado de situaciones de proporcionalidad y comportamiento lineal que se pueden presentar en un entorno cotidiano, estos modelos lineales nos permiten un mejor análisis. En otros campos, como el de la Física, te ayudará a comprender el concepto de movimiento rectilíneo. Y en el campo de la Geometría analítica abordará el estudio de las secciones cónicas, la circunferencia, la parábola, el elipse y la hipérbola.

www.elsolucionario.org

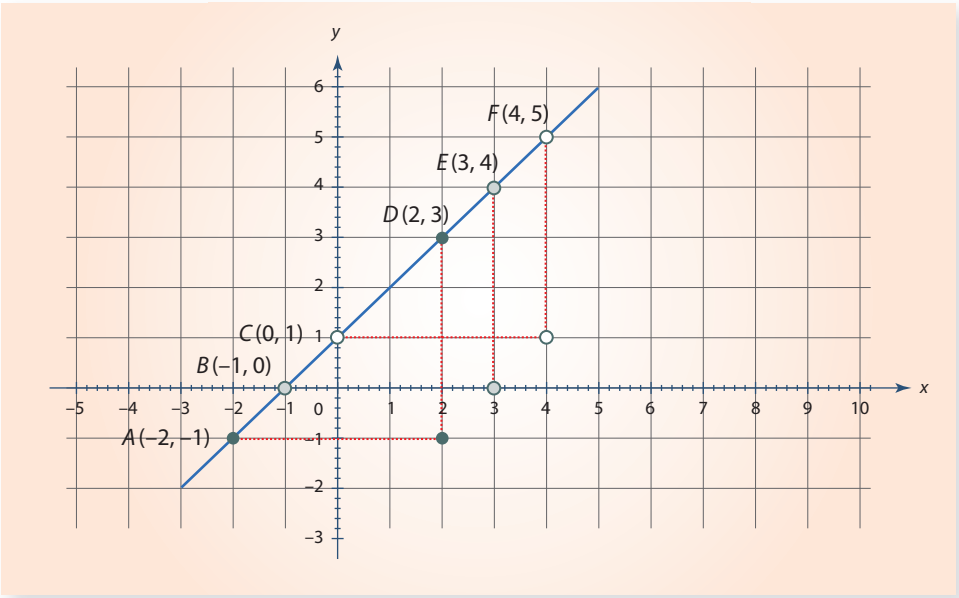
2.1 PENDIENTE Y ÁNGULO DE INCLINACIÓN

Desarrollo

El concepto analítico de pendiente de una recta puede definirse y ejemplificarse de distintas formas, una es la que usaremos en este apartado, la cual no es muy frecuente que se presente en textos escolares de Geometría analítica; sin embargo, es de mucha utilidad al graficar y localizar puntos pertenecientes a una misma recta.

Iniciemos el estudio de este concepto con la siguiente actividad.

1. Con base en la información de la siguiente gráfica, contesta las preguntas.



a) ¿Cuál es el incremento en las abscisas del punto *A* al *D*? _____

b) ¿Cuál es el incremento en las ordenadas del punto *A* al *D*? _____

Un incremento entre dos puntos lo podemos indicar usando el símbolo Δ, de manera que para indicar el incremento de las abscisas utilizamos el símbolo Δ_x y para el de las ordenadas, Δ_y.

c) ¿Cómo indicarías el cociente del incremento de las ordenadas entre las abscisas del punto *A* al punto *D*? _____ y ¿cuál sería ese cociente? _____.

d) Obtén $\Delta_y =$ _____, $\Delta_x =$ _____ y su cociente $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} =$ _____ para las coordenadas de los puntos *C* y *F*.

e) Obtén $\Delta_y =$ _____, $\Delta_x =$ _____ y su cociente $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} =$ _____ para las coordenadas de los puntos *B* y *E*.

www.elsolucionario.org

f) ¿Qué significado tiene en la gráfica de una recta Δ_x y Δ_y? _____

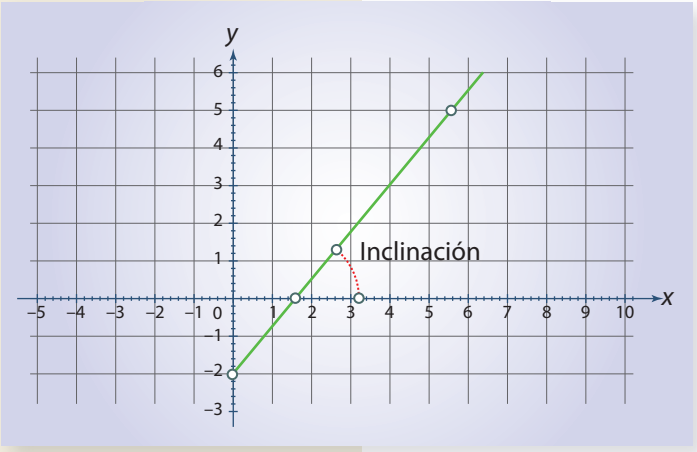
_____

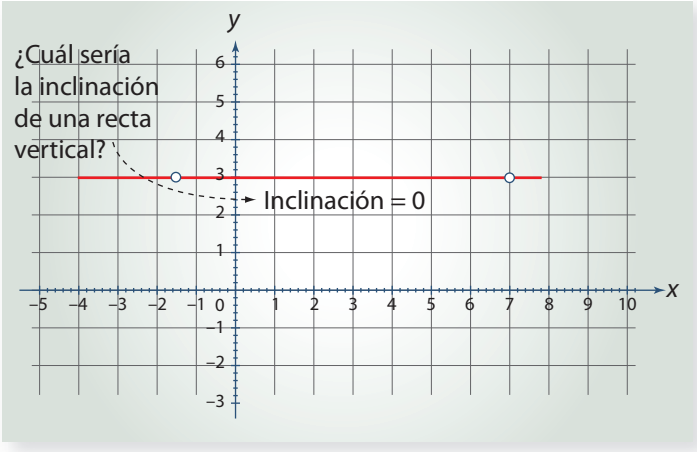
g) En cada uno de los triángulos formados en la gráfica, ¿qué representan los cocientes de los incrementos obtenidos en esta actividad? _____

_____

Las ideas que se manejaron en la actividad de apertura que acabas de realizar serán de utilidad para iniciar el estudio de la línea recta.

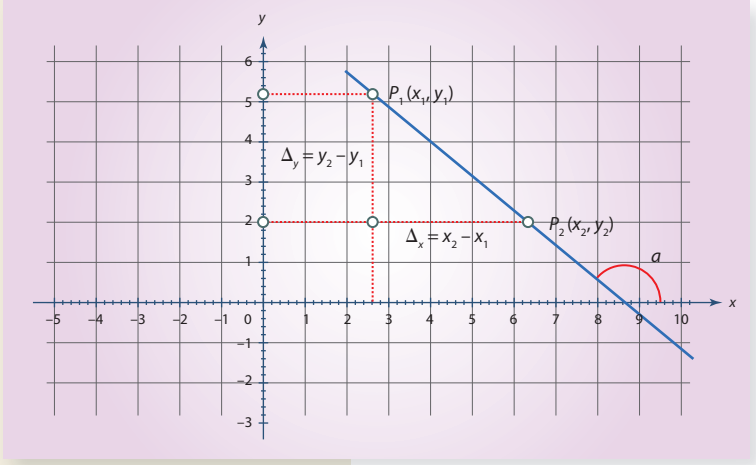
Toda línea recta no horizontal tiene una **inclinación**, la cual es el menor ángulo positivo que forma la dirección positiva de la misma recta con el semieje positivo *x*, esto quiere decir, que la inclinación de una recta es un ángulo entre 0° y 180°. En el caso de la recta horizontal decimos que su inclinación es cero.





Se le da el nombre de **pendiente (*m*)** a la tangente trigonométrica de la inclinación de la recta.

$$m = \tan a$$



Sin importar que el ángulo que forma la recta con el semieje positivo *x* sea agudo u obtuso se tiene que:

$$m = \tan a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En las rectas con pendiente positiva, su inclinación es menor de 90°; mientras que las rectas con pendiente negativa tienen una inclinación mayor de 90°.

Una recta paralela al eje *y* tiene una inclinación de 90° y su pendiente no está definida.

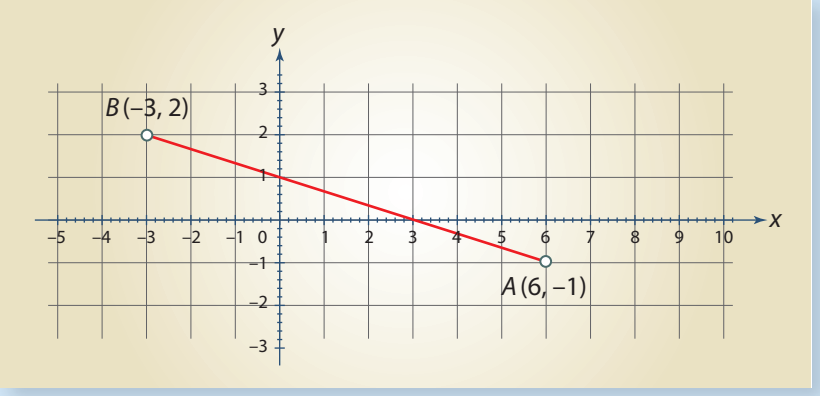
www.elsolucionario.org

La **pendiente** ***m*** de una recta no vertical que pasa por dos puntos dados, está dada por el cociente de la diferencia de sus ordenadas y de la diferencia de sus abscisas, tomadas en el mismo orden.

$$m = \tan a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_2 \neq x_1$$

Ejemplo 1

Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(6, -1)$ y $B(-3, 2)$.



Solución

Tomemos como punto inicial a B y como punto final a A; luego, calculemos la pendiente:

$$m_{BA} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{(-1) - (2)}{(6) - (-3)}$$
$$= \frac{-3}{9}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

Ejemplo 2

Traza la recta que pasa por $P(-3, 1)$ y que tiene una pendiente de $-\frac{2}{3}$.

Solución

La pendiente nos indica la diferencia que hay entre las coordenadas de dos puntos dados, por lo que si partimos de un punto $P_1(x_1, y_1)$, el siguiente punto que está en la misma recta a Δ_x unidades de x_1 y a Δ_y unidades de y_1.

$$P_2(x_1 + \Delta_x, y_1 + \Delta_y) = (-3 + 3, 1 + (-2))$$
$$= (0, -1)$$

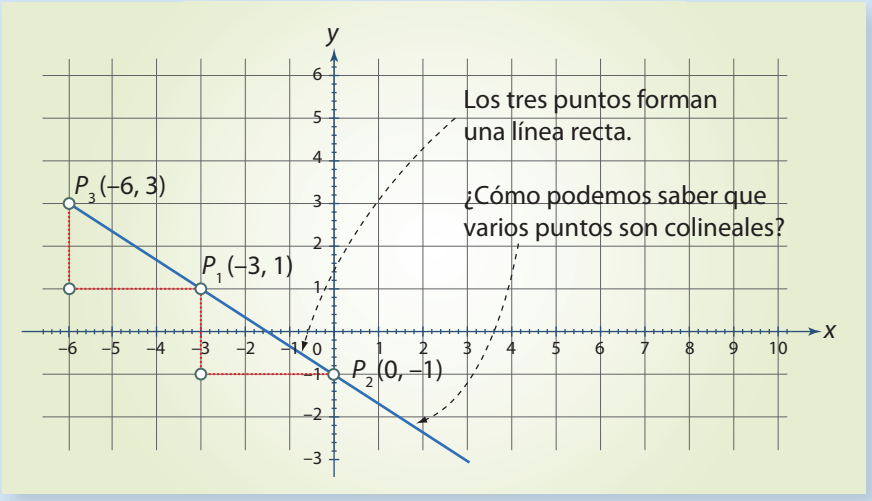
Pero también podemos obtener un punto anterior al dado:

$$P_3(x_1 - \Delta_x, y_1 - \Delta_y) = (-3 - 3, 1 - (-2))$$
$$= (-6, 3)$$

Continúa...

www.elsolucionario.org

Tracemos estos puntos en el plano y comprobemos que están alineados.

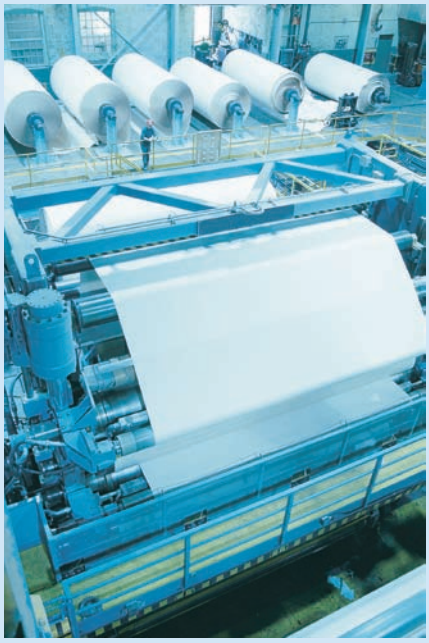


Ejemplo 3

Una prensa en 2015 valía $25 500, pero cuatro años antes, su valor era de $38 400. Si el valor de la imprenta varía linealmente con el tiempo:

a) ¿Cuánto varía su valor por año?

b) ¿Cuál será su valor en 2017?



Solución

a) En esta situación, la pendiente nos indica la variación del valor de la imprenta por año de uso, así que calculemos su valor, tomando como puntos $A(2011, 38\,400)$ y $B(2015, 25\,500)$.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{25\,500 - 38\,400}{2012 - 2008}$$

$$= \frac{-12\,900}{4}$$

$$= -3\,225$$

El valor de la prensa pierde $3 225 al año por uso y desgaste de sus partes.

www.elsolucionario.org

b) Si partimos de que en 2015 su valor era de $25 500, en el 2017 su valor será:

$$\begin{aligned}\text{Valor fututo} &= \text{Valor actual} - \text{depreciación}\\ &= 25\,500 - 2(3\,225)\\ &= 25\,500 - 6\,450\\ &= 19\,050\end{aligned}$$

Ejercicio 1

1. Determina la pendiente y la inclinación de las rectas que unen las siguientes parejas de puntos.

a) $A(0, 7)$ y $B(-1, 9)$

b) $D(5, 2)$ y $E(3, 4)$

c) $H(1, 4)$ y $J(-5, 2)$

d) $M(4, 2)$ y $N(4, 5)$

e) $T(3, 2)$ y $V(3, 5)$

f) $O(0, 0)$ y $P(-2, -5)$

2. Traza una recta que pase por el punto dado y que tenga la pendiente indicada.

a) $G(2, -3)$, $m = \frac{3}{5}$

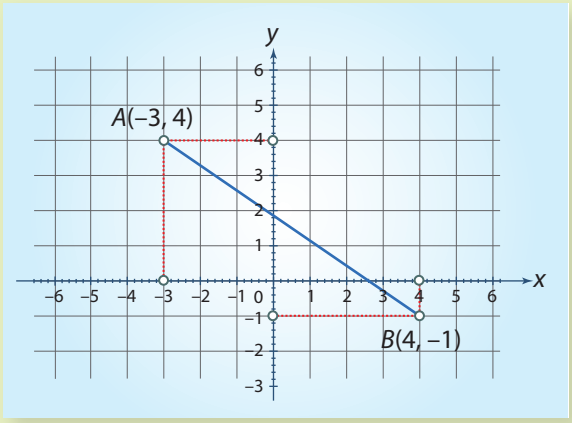
b) $R(-3, 0)$, $m = -\frac{4}{3}$

c) $K(-4, 2)$, $m = -\frac{2}{5}$

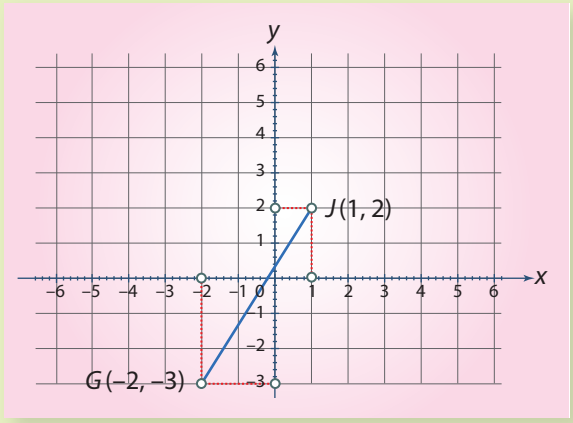
d) $D(4, 1)$, $m = \frac{7}{3}$

3. Observa las siguientes gráficas y determina su inclinación y pendiente.

a)



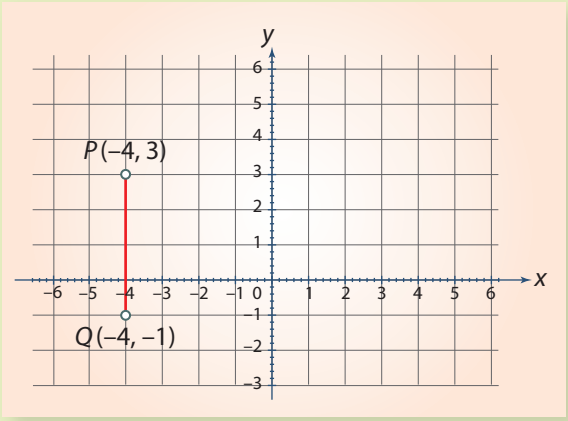
b)



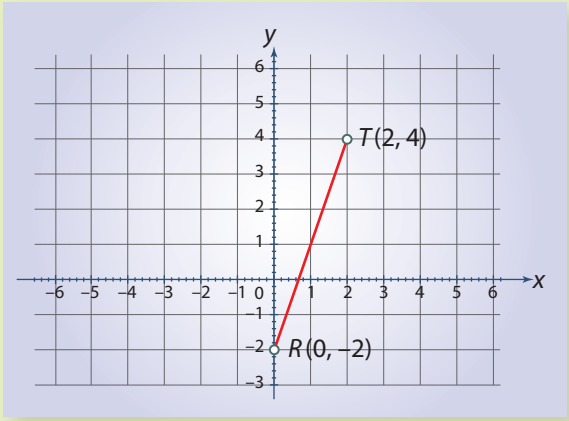
Continúa...

www.elsolucionario.org

c)



d)



4. Una motocicleta tiene 25 meses de uso y su valor de venta es de $18 700, sin embargo, siete meses antes su valor era de $22 620. Si el valor de la motocicleta varía linealmente con el tiempo:

a) ¿Cuál es la variación mensual del precio de venta de la motocicleta?

b) ¿Cuál será el valor de venta a los 38 meses de uso?

5. En 1994, Ulises compró un departamento en $234 000 y en el 2005 el mismo departamento fue valuado en $312 000. Suponiendo que el valor del departamento crece linealmente con el tiempo:

a) ¿Cuál es la variación anual del precio de venta del departamento?

b) ¿Cuál será el valor de venta del departamento para el año 2017?

6. Una compañía determina que producir 200 artículos tiene un costo de $3 500, mientras que producir 750 artículos le cuesta $8 700. Si el costo varía linealmente con la cantidad de artículos producidos:

a) ¿Cuál es la variación del costo por unidad?

b) ¿Cuánto le cuesta a la empresa producir 1 300 artículos?

www.elsolucionario.org

7. Investiga acerca de presión hidrostática y contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué significa?

b) ¿Qué relación hay entre la presión ejercida por el líquido y la profundidad a la que está un objeto?

c) ¿Cuál es la presión hidrostática en una alberca a una profundidad 2.3 m?

d) ¿A qué profundidad la presión hidrostática en la alberca es de 13 600 Pa?

2.2 FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA Y SUS TRANSFORMACIONES

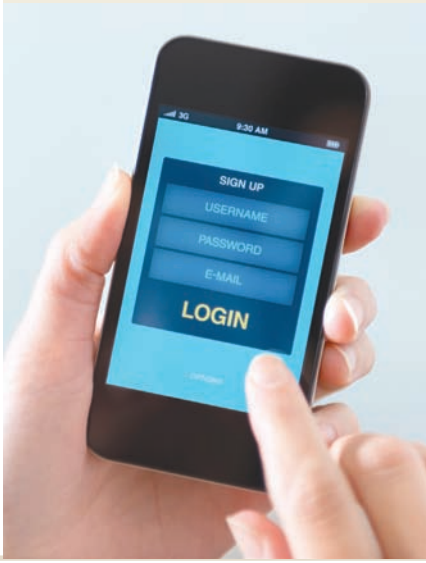
Como hemos visto, para determinar una línea recta necesitamos dos condiciones, éstas pueden ser:

a) Dos puntos por donde pasa la recta.

b) Un punto y la inclinación de la recta.

c) Un punto y la pendiente de la recta.

Uno de los principales problemas de la Geometría analítica es obtener la ecuación de una curva dada, partiendo de los elementos que se tienen. Iniciemos el estudio de esta representación analítica de la recta.



Ecuación punto-pendiente

El teléfono celular de Aurora tiene una aplicación que le informa la duración de cada una de sus llamadas en minutos y el costo de la misma en pesos. Para llevar un mejor control de su tiempo aire, hace una tabla en una hoja de papel y en ella anota la duración de sus llamadas y calcula el costo a pagar.

Duración de llamada	3.6	*x*	5.4	2.8	11
Costo de llamada	5.22	10.73	*y*	4.06	15.95

www.elsolucionario.org

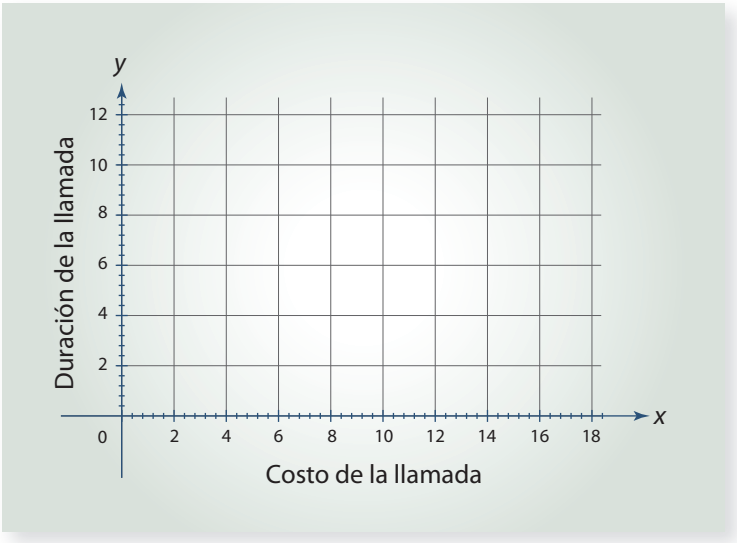
Suponiendo que el comportamiento del costo de las llamadas es lineal, contesta las siguientes preguntas con base en la información de esta tabla.

a) ¿Cuál es el costo por minuto? _____

b) ¿Cuál fue la duración de la llamada que tuvo un costo de $10.73? _____

c) ¿Cuál es el costo de la llamada que duró 5.4 minutos? _____

d) Ubica en el siguiente plano cartesiano los puntos anotados en la tabla y únelos con una línea suave. ¿Qué forma tiene la gráfica obtenida? _____



e) Calcula el costo de una llamada de 4 min. ¿Este dato se encuentra en la gráfica que trazaste? _____

f) Considera a *y* como el costo de llamada y a *x* como la duración de la misma. Obtén un modelo matemático que nos permita calcular el costo de cada llamada partiendo de su duración. _____

_____

g) Elige dos puntos cualesquiera de la tabla y calcula con ellos la pendiente de una recta. ¿Qué representa la pendiente que obtuviste con respecto al modelo propuesto?

_____

Un modelo matemático es una expresión que contiene los elementos característicos de una situación dada. En el caso de la recta son los dos puntos por donde pasa o un punto y su inclinación o su pendiente. Entre los modelos que representan una línea recta están las igualdades algebraicas, llamadas también ecuaciones lineales o de primer grado. Que ahora veremos cómo obtenerlas dependiendo de la información que tengamos.

En el tema 2.1 mencionamos que sin importar qué puntos tomemos de una recta, éstos tienen la misma pendiente. Es decir, si tenemos una línea recta que pasa por un punto

www.elsolucionario.org

$P_1(x_1, y_1)$ y tiene una pendiente m cuya trayectoria de un punto $P(x, y)$ se mueva de tal manera que la pendiente de PP_1 es siempre m y contiene todos los puntos de la recta l, excepto a $P_1(x_1, y_1)$. Por lo que la ecuación de esa trayectoria es:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Que en forma simplificada se puede escribir como:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

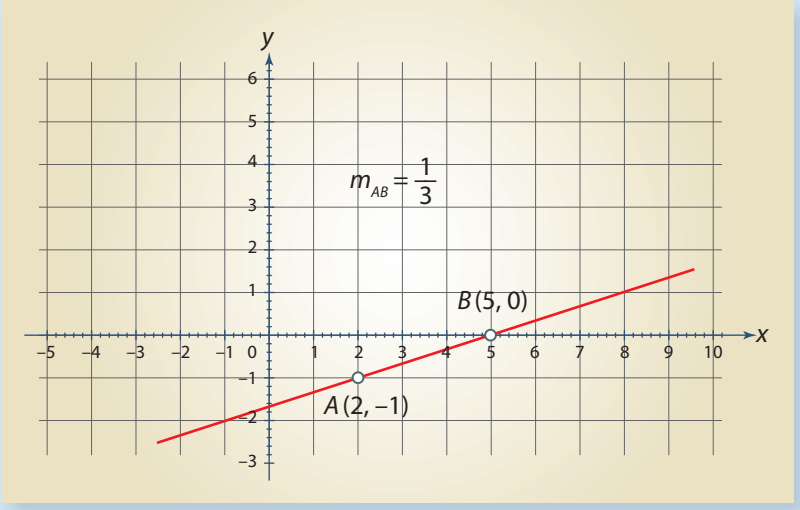
La ecuación $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$ se conoce como **ecuación punto-pendiente** de la recta.

Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -1)$ y tiene una pendiente de $\frac{1}{3}$.

Solución

Grafiquemos las condiciones del ejemplo, ya que al conocer la pendiente, ésta nos informa que la variación entre las ordenadas de los puntos de esta recta es de una unidad al variar las abscisas tres unidades.



Apliquemos la forma punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta solicitada.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

O también:

$$3(y + 1) = 1(x - 2)$$

$$3y + 3 = x - 2$$

$$0 = x - 3y - 2 - 3$$

$$x - 3y - 5 = 0$$

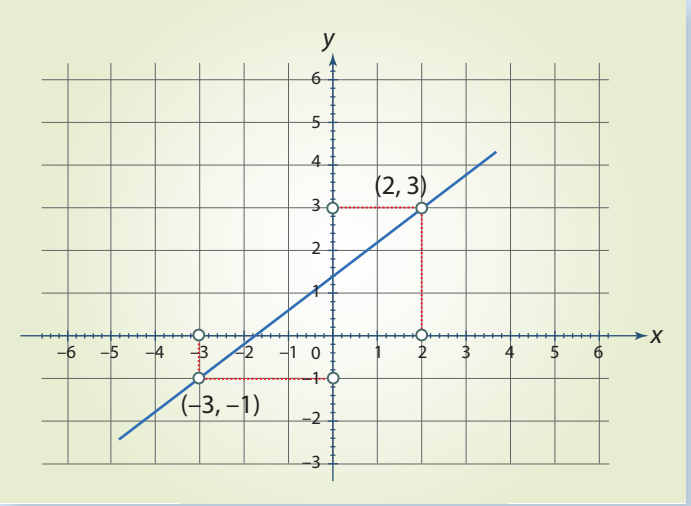
www.elsolucionario.org

Ejemplo 5

Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–3, –1) y (2, 3).

Solución

Tracemos la gráfica de los puntos dados y la recta correspondiente.



Calculemos primero la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3-(-1)}{2-(-3)} = \frac{4}{5}$$

Obtengamos la ecuación de la recta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y-(-1) = \frac{4}{5}(x-(-3))$$

$$y+1 = \frac{4}{5}(x+3)$$

O también:

$$5(y+1) = 4(x+3)$$

$$5y+5 = 4x+12$$

$$0 = 4x - 5y + 12 - 5$$

$$4x - 5y + 7 = 0$$

Ejemplo 6

Una *tablet* nueva cuesta $3 500. Si su valor se deprecia linealmente $245 por año. Elabora un modelo matemático que relacione su precio con el tiempo de uso.

Solución

Tomemos los datos dados como puntos cartesianos, siendo x el número de años de uso y y el valor de la *tablet*, así obtendremos como puntos:

(0, 3 500) y (1, 3 500 – 245) = (1, 3 255)

www.elsolucionario.org

Como el comportamiento del precio es lineal, el modelo que buscamos es la ecuación de la recta que describen los puntos.

Calculando la pendiente obtenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3\,255 - 3\,500}{1 - 0} = -\frac{245}{1} = -\$245/\text{año}$$

Ahora, obtengamos la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3\,500 = -245(x - 0)$$
$$y - 3\,500 = -245x$$
$$y = -245x + 3\,500$$

Traza la gráfica de la recta que describen los puntos obtenidos.

La ecuación obtenida relaciona el número de años de uso con el valor de la *tablet.*

Ejemplo 7

Traza la gráfica de la recta $3x + y - 4 = 0$ mediante dos puntos convenientes.

Solución

Despejemos una de las variables de la ecuación dada, en este caso y que es más conveniente.

$$3x + y - 4 = 0$$
$$y = -3x + 4$$

Asignemos dos valores a x que nos permitan encontrar la ordenada que corresponde a cada uno de ellos:

Para $x = 0$

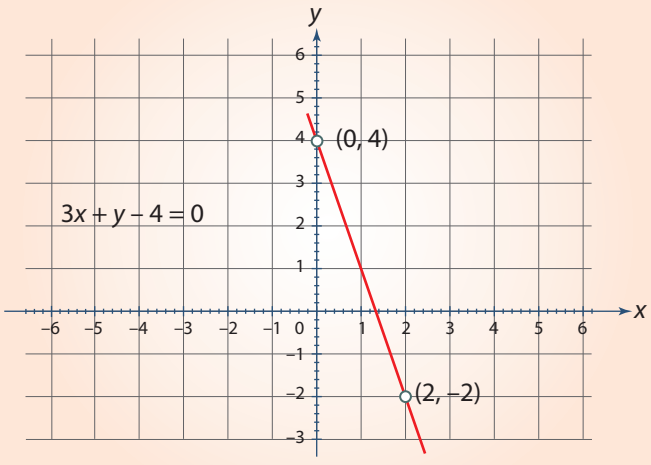
$$y = -3(0) + 4$$
$$= 0 + 4$$
$$= 4$$

Para $x = 2$

$$y = -3(2) + 4$$
$$= -6 + 4$$
$$= -2$$

Los puntos obtenidos son (0, 4) y (2, –2).

Tracemos los puntos en el plano cartesiano y los unimos con la recta que los contiene.



www.elsolucionario.org

Ejercicio 2

1. Encuentra la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas en cada inciso.

a) Pasa por (–5, –3) y (4, 4).

b) Pasa por (–2, 3) y $m = \frac{2}{5}$

c) Pasa por (–1, 0) y $m = -2$

d) Pasa por (0, –4) y (–5, 0)

e) Pasa por $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y (5, –2)

f) Pasa por (–3, –2) y $m = -\frac{3}{4}$

g) Pasa por (–4, 2) y una inclinación de 30°.

h) Pasa por (2, –3) y una inclinación de 120°.

2. Traza la gráfica de cada una de las siguientes rectas.

a) $3x - y + 2 = 0$

b) $2x - 6 = 0$

c) $2x + 4y - 10 = 0$

d) $0.5x - 2.1y - 4 = 0$

e) $3y - 9 = 0$

f) $2x + 3y = 0$

3. Un equipo de sonido tiene un valor venta de $32 400 a los ocho años de uso y de $19 200 después de 11 años.

a) El modelo que expresa la relación de su valor con el tiempo de uso.

b) El valor del equipo a los cuatro años de uso.

c) ¿A los cuantos años se deprecia totalmente el equipo?

4. El valor catastral de una casa de 15 años de uso es de $670 000, pero hace ocho años su valor era de $820 000. Si dicho valor se deprecia linealmente con el tiempo determina:

a) El modelo que relaciona el valor catastral con el número de años de uso.

b) El valor catastral de la casa cuando era nueva.

c) ¿Cuánto valdrá la casa a los 20 años?

d) ¿Qué indica la pendiente en este modelo?

www.elsolucionario.org

5. El costo de un viaje en taxi es de $10 al abordar, más $3.50 por kilómetro recorrido si x representa el número de kilómetros del recorrido. Obtén:

a) El modelo que representa el costo de un viaje en taxi en función de los kilómetros recorridos.

b) El costo de un viaje en taxi si se recorren 12 km.

c) ¿Si se pagaron $120 de cuantos kilómetros fue el recorrido?

6. El valor de una pantalla de plasma nueva es de $4 690. Si se deprecia su valor linealmente 8.5% por año, encuentra:

a) Una ecuación que ayude a determinar el valor de la pantalla de plasma a los t años de uso.

b) ¿Cuál será el valor de la pantalla de plasma después de 4 años de uso?

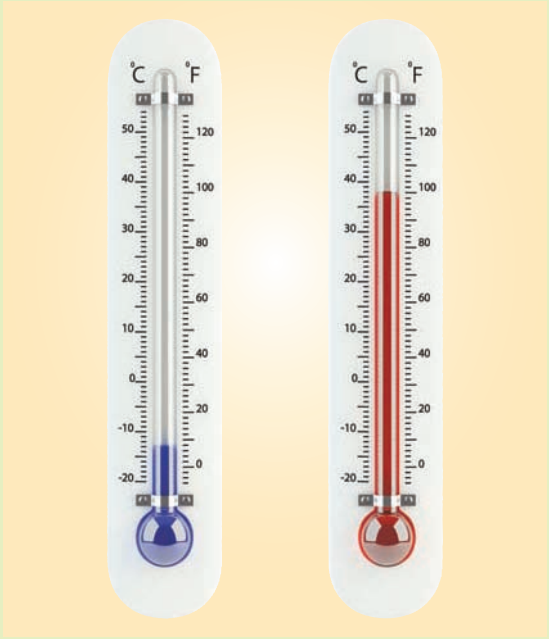
c) ¿En cuántos años se deprecia completamente la pantalla de plasma?

7. Investiga la relación que hay entre las escalas para medir la temperatura Celsius y Fahrenheit y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de relación hay entre las dos escalas?

b) ¿Qué temperatura indica la escala Fahrenheit cuando la escala Celsius marca 100 °C?

c) ¿Qué temperatura marca una escala Celsius cuando un termómetro en escala Fahrenheit marca 170 °F?



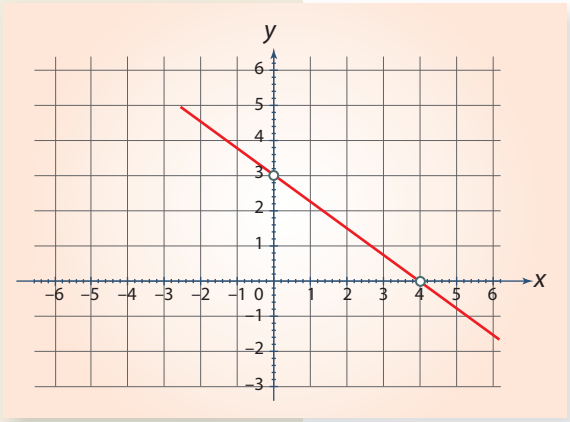
www.elsolucionario.org

Ecuación pendiente-ordenada al origen

Cuando una recta corta a uno de los ejes en el punto $A(a, 0)$, se le conoce como **abscisa al origen** de la recta; y si corta en el punto $B(0, b)$, se le llama **ordenada al origen** de la recta.

Obtén la ecuación de cada una de las siguientes gráficas.

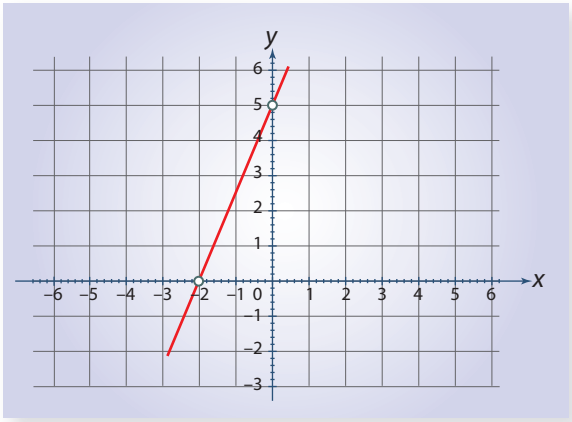
a)



¿Cuál es la abscisa al origen? _____

¿Cuál es la ordenada al origen? _____

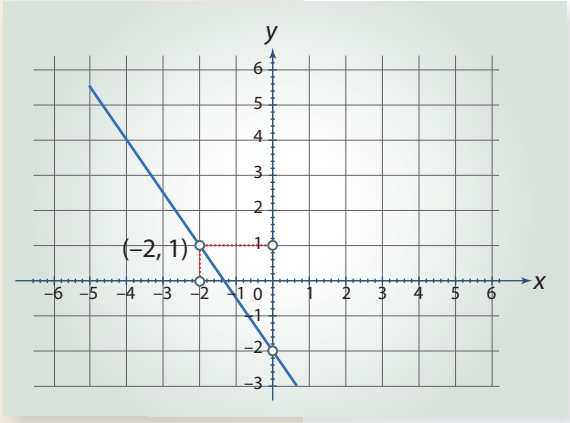
b)



¿Cuál es la abscisa al origen? _____

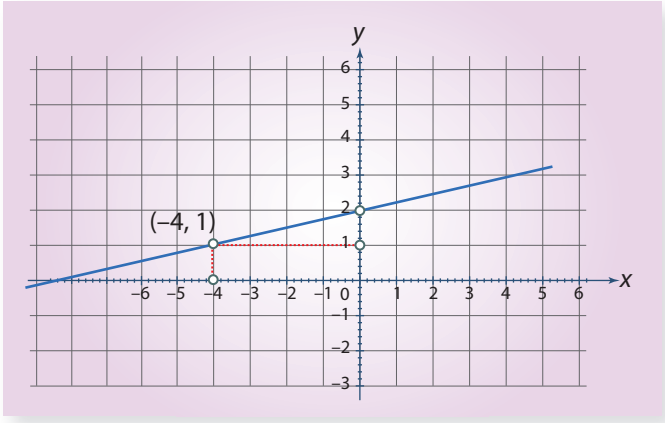
¿Cuál es la ordenada al origen? _____

c)



¿Cuál es la ordenada al origen? _____

d)



¿Cuál es la ordenada al origen? _____

Otra forma en la que se puede presentar la ecuación de la línea recta es considerando como punto la intersección de la recta con el eje *y* y la pendiente de la recta, veamos a continuación cómo.

www.elsolucionario.org

Si la recta cuya ecuación queremos obtener tiene pendiente m y ordenada al origen b, el punto en que interseca el eje y es el punto $(0, b)$, de manera que su ecuación es:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - b &= m(x - 0) \\ y - b &= mx \\ y &= mx + b \end{aligned}$$

Ecuación que está en la forma **pendiente-ordenada al origen**.

Ejemplo 8

Traza la gráfica de la recta $2x + 3y - 6 = 0$ mediante sus coordenadas al origen.

Solución

Para obtener las coordenadas al origen de la recta dada, le damos el valor de cero a cada una de las variables, así:

Para la ordenada al origen:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 2x + 3y - 6 &= 0 \\ 2(0) + 3y - 6 &= 0 \\ 3y - 6 &= 0 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

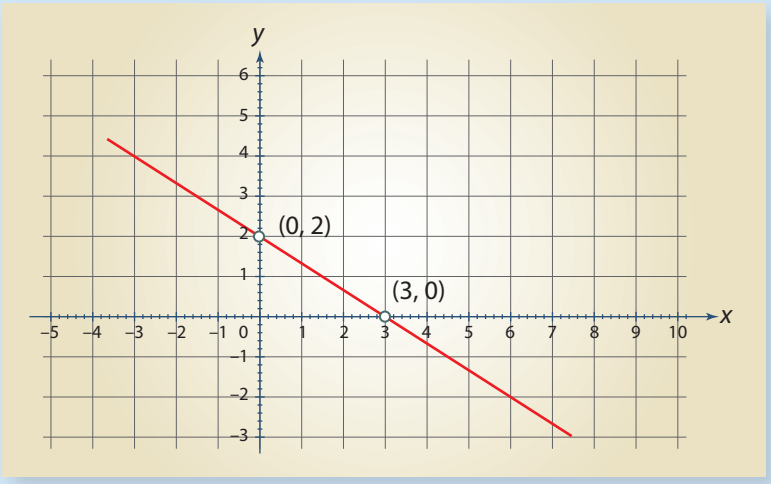
$(0, 2)$ es la ordenada al origen.

Para la abscisa al origen:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 2x + 3y - 6 &= 0 \\ 2x + 3(0) - 6 &= 0 \\ 2x - 6 &= 0 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$(3, 0)$ es la abscisa al origen.

Trazamos los puntos obtenidos y la recta que definen.



www.elsolucionario.org

Ejemplo 9

Encuentra la ecuación de la recta cuya ordenada al origen es (0, 2) y $\boldsymbol{m} = \frac{3}{4}$.

Solución

Sustituimos los elementos dados en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$y = mx + b$$

En donde de acuerdo con la información, $m = \frac{3}{4}$ y $b = 2$.

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

O también:

$$y - 2 = \frac{3}{4}x$$

$$4(y - 2) = 3x$$

$$4y - 8 = 3x$$

$$3x - 4y + 8 = 0$$

Ejemplo 10

Encuentra la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen de la recta que pasa por los puntos (4, 0) y (0, –1).

Solución

Calculemos primero la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:

$$m = \frac{0 - (-1)}{4 - 0} = \frac{1}{4}$$

Conociendo la pendiente $m = \frac{1}{4}$ y la ordenada al origen $b = -1$, obtenemos la ecuación de la recta solicitada.

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1$$

O también:

$$y + 1 = \frac{1}{4}x$$

$$4(y + 1) = x$$

$$4y + 4 = x$$

$$x - 4y - 4 = 0$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 11

Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = -2x + 2$.

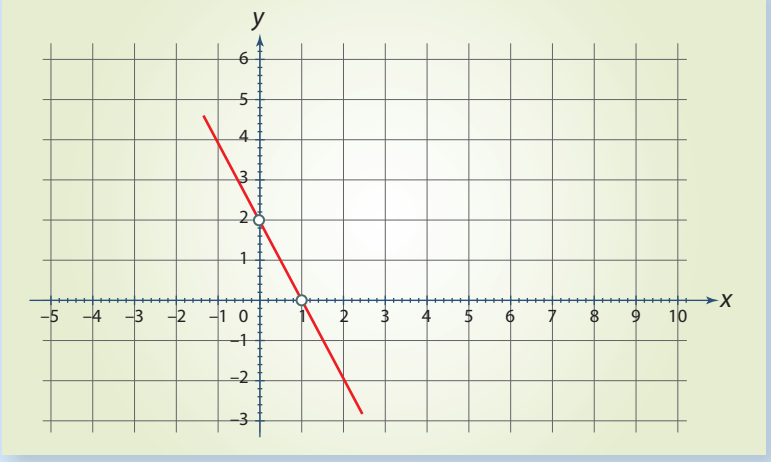
Solución

Localizamos en el plano la ordenada al origen y haciendo uso de la pendiente ubicamos el siguiente punto que nos permite trazar la recta que contiene a todos los demás.

La pendiente nos indica que las ordenadas disminuyen dos unidades cuando las abscisas se incrementan una unidad.

A partir de la ordenada al origen (0, 2) ubicamos el siguiente punto.

$$(0 + 1,\ 2 + (-2)) = (1,\ 0)$$



Ejercicio 3

1. Traza la gráfica de cada una de las siguientes rectas mediante sus coordenadas al origen.

a) $3x - 2y = 6$ *b)* $x + 4y - 4 = 0$

c) $2x + 5y = 10$ *d)* $4x - 8y + 16 = 0$

e) $3x - 9 = 0$ *f)* $4y + 12 = 0$

2. Obtén la ecuación de cada una de las siguientes rectas en su forma pendiente-ordenada al origen.

a) (0, 3) y $m = -3$ *b)* (–2, 0) y (0, 5)

c) (–5, 3) y (0, –2) *d)* (0, 1) y $m = \frac{4}{5}$

e) $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y $m = 4$ *f)* (–4, 0) y (0, –2)

3. Un vendedor invierte por cada artículo que produce $3.50 y tiene gastos fijos semanales de $13 800. Si sus gastos totales crecen en forma lineal, obtén:

a) Un modelo que relacione el total de sus gastos con el número de artículos producidos en una semana.

Continúa...

www.elsolucionario.org

b) ¿Cuánto invierte por la producción de 750 artículos?

c) ¿Cuántos artículos produce la semana en que sus gastos ascienden a $18 175?

4. Un empresario presupuesta que dentro de cuatro años el valor de una de sus máquinas será de $20 100 cuando esa misma máquina dos años antes costaba $27 600. Con esta información determina:

a) El modelo matemático que relaciona el valor de la máquina con el tiempo de uso en años en forma pendiente-ordenada al origen.

b) ¿Qué representa en el modelo que obtuviste la pendiente y la ordenada al origen en la situación planteada?

c) ¿Cuál será el valor de la máquina dentro de 10 años a partir de este momento?

5. El costo de conducir un automóvil es directamente proporcional a la distancia recorrida. Supongamos que el dueño de un automóvil gasta en el mes de enero $1 596 por 1 568 km y en el mes de marzo, $2 394 por 2 352 km. Encuentra:

a) Un modelo lineal que relacione el costo en función de la distancia recorrida.

b) El costo por conducir 2 120 km.

c) El kilometraje recorrido durante el mes en el que invirtió $1 710.

www.elsolucionario.org

Investiga y propón para su solución dos ecuaciones lineales.

Ecuación general

Hemos citado hasta este momento distintas formas de escribir la ecuación de la línea recta y todas son equivalentes, así que cada una de ellas se puede simplificar a una expresión igualada a cero.

www.elsolucionario.org

Las ventas anuales en millones de pesos de una tienda departamental, durante los últimos cinco años fueron:

Ventas anuales (y)	5.8	6.2	7.2	8.4	9.0
Año (x)	2011	2012	2013	2014	2015

a) Grafica las ventas anuales (y) contra el año (x).

b) Traza la línea recta L que pase por los puntos correspondientes al segundo año y al cuarto.

c) Escribe la ecuación que representa a la recta L.

d) Utiliza la ecuación obtenida y estima las ventas anuales dentro de cinco años.

La ecuación general de la recta es la expresión algebraica que podemos escribir de la siguiente manera:

$$Ax + By + C = 0$$

donde A o B deben ser diferentes de cero.

Si partimos de la ecuación en forma general, podemos establecer su equivalencia con la forma pendiente-ordenada al origen, despejando a y de la ecuación en forma general.

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = \frac{-Ax - C}{B}$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

De donde obtenemos que:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad \text{y} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

Al mismo tiempo, podemos establecer tres resultados importantes de la forma general de la recta:

Siendo $Ax + By + C = 0$ la ecuación general de una recta:

a) Si $A = 0$, entonces $By + C = 0$ representa una recta horizontal.

b) Si $B = 0$, entonces $Ax + C = 0$ representa una recta vertical.

c) Si $C = 0$, entonces, $Ax + By = 0$ es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

www.elsolucionario.org

Ejemplo 12

Escribe la ecuación $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ en forma general.

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ecuación dada.}$$

$$3y = 3\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Multiplicando por 3.}$$

$$3y = 2x - 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Realizando el producto indicado.}$$

$$0 = 2x - 3y - 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Transponiendo términos.}$$

$$2x - 3y - 4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ecuación general.}$$

Otra manera de obtener la ecuación general de la recta es mediante el determinante de la matriz.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 13

Obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (5, –1) en forma general.

Solución

Para obtener la ecuación de la recta, obtendremos el determinante de la matriz cuadrada, tomando como $(x_1, y_1) = (3, 2)$, por tanto:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para obtener el determinante, utilizaremos el método de Sarrus en forma horizontal, repitiendo las dos primeras columnas:

$$= (2x + 5y + 3) - (10 + x + 3y) = 0$$

$$= (2x - x) + (5y - 3y) + (3 - 10) = 0$$

$$= x + 2y - 7 = 0$$

Siendo la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

$$x + 2y - 7 = 0$$

Utiliza otro método para corroborar el resultado obtenido.

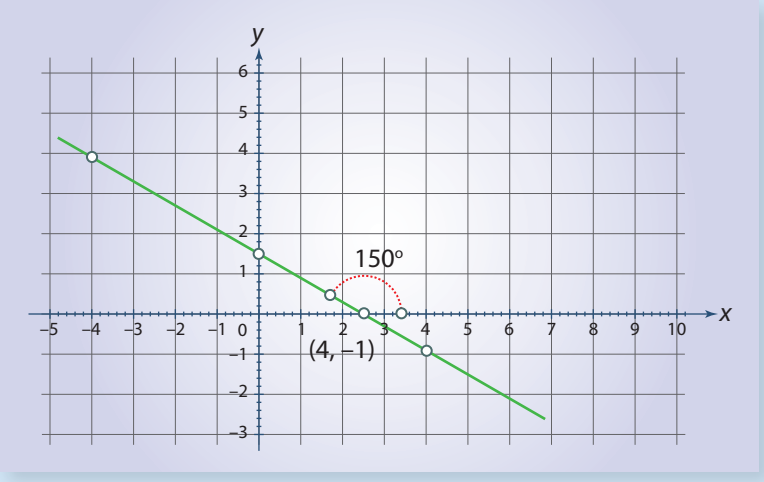
www.elsolucionario.org

Ejemplo 14

Obtén la ecuación de la recta que tiene una inclinación de 150° y pasa por el punto (4, –1) y exprésala en forma general.

Solución

Tracemos la gráfica de las condiciones iniciales.



Obtengamos primero la pendiente:

$$\alpha = 150°$$

$$m = \tan\alpha = \tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Calculemos la ecuación de la recta con los datos que tenemos:

Punto: (4, –1) y $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$y-(-1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$$

$$\sqrt{3}(y+1) = -1(x-4)$$

$$\sqrt{3}y + \sqrt{3} = -x + 4$$

$$x + \sqrt{3}y + \left(\sqrt{3} - 4\right) = 0$$

Ejemplo 15

Rafael produce en su fábrica artículos de madera cuyo costo unitario es de $3 y tiene gastos fijos (renta, agua, luz, papelería) por $2 300.

a) Obtén un modelo que represente los gastos mensuales de Rafael.

b) Traza la gráfica de la ecuación obtenida.

c) ¿Qué significa la pendiente de la recta y la intersección de la recta con el eje *y*?

Solución

a) Si *x* es el número de unidades que se producen en la fábrica de Rafael, los gastos mensuales los podemos representar por medio de la variable *y*.

www.elsolucionario.org

Un modelo que puede representar la situación es:

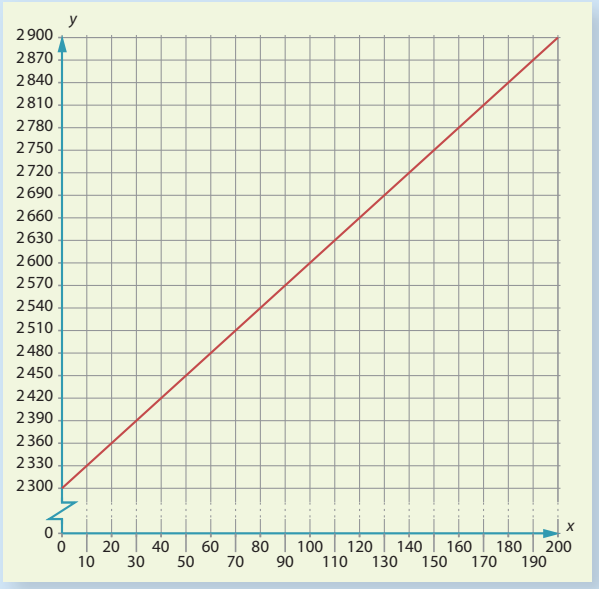
$$y = 3x + 2\,300$$

b) Demos dos valores arbitrarios a x y representemos el gasto correspondiente.

x	50	150
y	2 450	2 750

$$y = 3(50) + 2\,300$$
$$= 150 + 2\,300$$
$$= 2\,450$$

$$y = 3(150) + 2\,300$$
$$= 450 + 2\,300$$
$$= 2\,750$$



c) El valor de la pendiente en este modelo representa el costo unitario de producción de Rafael de los artículos de madera.

La intersección de la gráfica con el eje y representa lo que Rafael tiene que pagar aunque no tenga producción.

Ejercicio 4

1. Obtén la ecuación de cada una de las rectas de acuerdo con las condiciones dadas y exprésala en forma general.

a) (2, 5) y (7, 1)

b) (–5, –4) y (0, 3)

c) (–6, 0) y (0, 3)

d) (–7, –4) y (1, –6)

e) $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{4}\right)$ y $m = -\frac{3}{4}$

f) (–2.3, –5.4) y $m = 1$

2. Expresa cada una de las siguientes ecuaciones en forma general.

a) $y = 4x - 3$

b) $y = \frac{3}{2}x + 3$

Continúa...

www.elsolucionario.org

c) $y + 3 = -2(x - 1)$

d) $y - \frac{2}{5} = \frac{3}{2}\left(x + \frac{7}{10}\right)$

e) $r = -\frac{3}{5\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta}$

f) $r = \frac{1}{7\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta}$

3. De acuerdo con la comisión ballenera internacional, en la década de los 60, el peso (*P*) de una ballena azul adulta, está relacionado con la longitud (*L*) en pies, de su cuerpo en 351% disminuido en 192 pies.

a) Obtén un modelo matemático que exprese el peso esperado de una ballena azul adulta en función de su longitud.

b) Calcula el peso de una ballena azul adulta de 110 pies.

c) Grafica la línea recta que representa la ecuación que obtuviste en el inciso *a*).

4. Un plomero cobra $70 por visita domiciliaria, más $40 por hora de trabajo.

a) Obtén un modelo matemático que exprese los honorarios (*y*) que percibe el plomero en función del número de horas (*x*) que dura un trabajo.

b) Calcula los honorarios que recibe el plomero por una visita de 4.5 horas.

c) Grafica la línea recta que representa la ecuación que obtuviste como modelo.

5. Verónica ofrece banquetes a grupos de personas. Si en dos de ellos cobró por sus servicios $9 170 por 130 comensales y $5 650 por 75 comensales.

a) Encuentra un modelo matemático que permita calcular el costo de sus servicios, considerando que el comportamiento del costo es lineal.

b) ¿Cuánto cobrará por un servicio de banquete para 100 personas?

c) Traza la gráfica de la recta representada por la ecuación que obtuviste en el inciso *a*).

www.elsolucionario.org

6. Investiga los conceptos de costos fijos y costos variables en una situación de producción.

Aplica la información obtenida para contestar las siguientes preguntas relacionadas con modelos lineales.

Los costos de producción por cierta cantidad de artículos se encuentra en la siguiente tabla:

Núm. de artículos (x)	10	20	25
Costo de producción (y)	95	y	180

a) Determina la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.

b) Calcula el costo de producir 20 artículos al día.

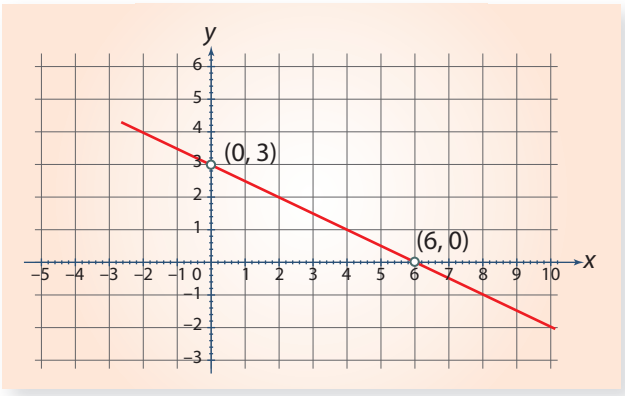
c) ¿Cuáles son los costos fijos y los costos variables?

Ecuación simétrica

La forma simétrica de la recta considera sus intersecciones con los ejes cartesianos, por lo que abordaremos esta forma de expresar la ecuación de una recta desde un punto gráfico inicial y posteriormente de manera analítica.

Observa las siguientes gráficas y obtén su ecuación de manera mental, utilizando únicamente la información proporcionada por la gráfica.

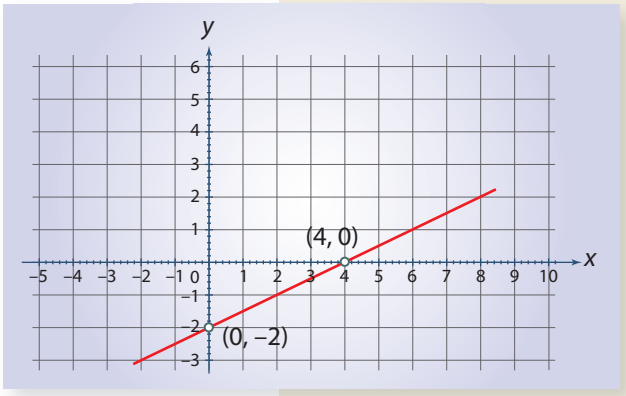
a)



Pendiente: _____

Ecuación de la recta: _____

b)

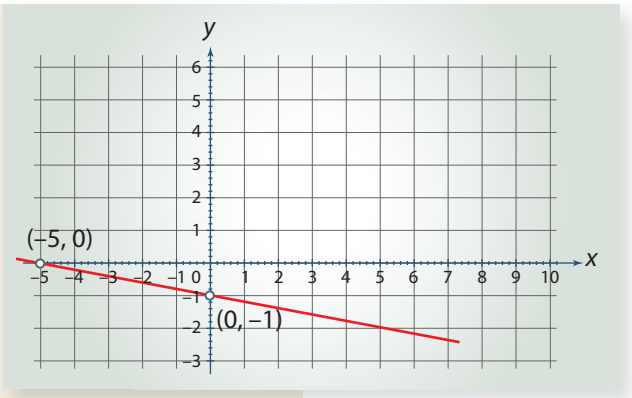


Pendiente: _____

Ecuación de la recta: _____

www.elsolucionario.org

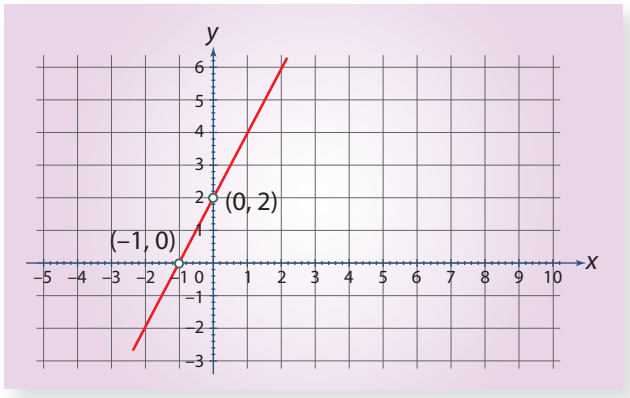
c)



Pendiente: _____

Ecuación de la recta: _____

d)



Pendiente: _____

Ecuación de la recta: _____

Como puedes observar en la actividad de apertura, las cuatro rectas tienen una pendiente dada por:

$$m = -\frac{\text{Ordenada al origen}}{\text{Abscisa al origen}} = -\frac{b}{a}$$

Por lo que la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen es:

$$y = mx + b$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

O multiplicada por a queda:

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

Por lo que la dividimos entre ab para que quede igualada a 1.

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Que es la ecuación de la recta en la **forma simétrica**.

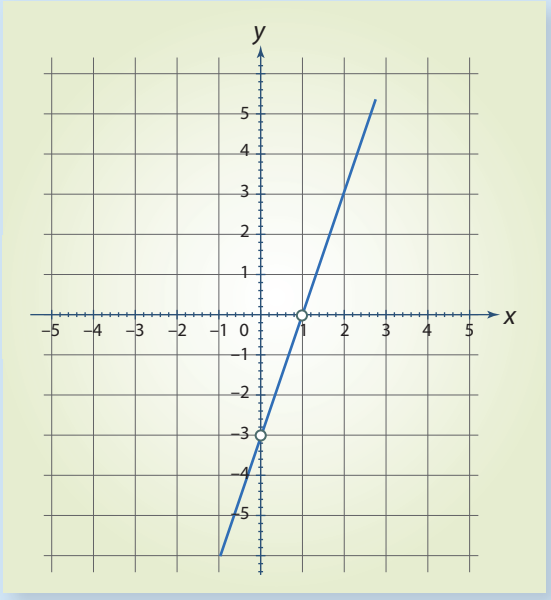
www.elsolucionario.org

Ejemplo 16

Obtén la pendiente y la ecuación de la recta en su forma simétrica que interseca los ejes cartesianos en los puntos (1, 0) y (0, –3).

Solución

Tracemos la recta que contiene los puntos dados.



Ahora su pendiente:

$$m = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$$

Siendo $a = 1$ y $b = -3$ la ecuación en forma simétrica es:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$x - \frac{y}{3} = 1$$

Ejemplo 17

La ecuación de una recta en forma simétrica $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ transfórmala a la forma general.

Solución

Podemos expresar en forma general la ecuación dada, obteniendo una ecuación equivalente igualada a cero, para ello calculamos el mcm (3, 5) y multiplicamos por éste la ecuación igualándola a cero.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ecuación dada.}$$

mcm (3, 5) = 15

$$15\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{5}\right) = 15(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Multiplicando por el mcm (3, 5).}$$

$$5x + 3y = 15 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Productos indicados.}$$

$$5x + 3y - 15 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Igualando a cero.}$$

Ecuación general de la recta: $5x + 3y - 15 = 0$.

www.elsolucionario.org

Ejemplo 18

Los clientes de cierto producto compran 50 unidades cuando su precio es de $20 por unidad y 30 unidades cuando el precio es de $26 cada una.

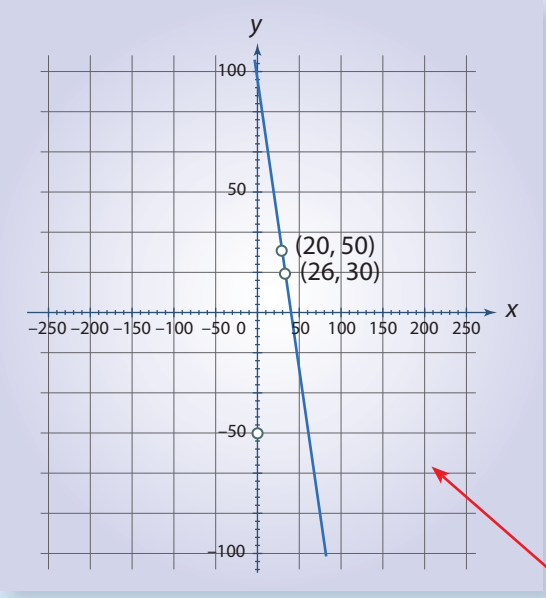
a) Obtén la ecuación de demanda, suponiendo un comportamiento lineal.

b) ¿A qué precio no habría consumo del producto?

c) Calcula el precio al que se requieren 27 unidades.

Solución

a) Grafiquemos la recta que contiene los puntos dados y obtengamos su ecuación en forma pendiente-ordenada al origen.



Pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{30 - 50}{26 - 20} = \frac{-20}{6} = -\frac{10}{3}$$

Obtenemos su ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 50 = -\frac{10}{3}(x - 20)$$

$$3(y - 50) = -10(x - 20)$$

$$3y - 150 = -10x + 200$$

$$y = \frac{-10x + 350}{3}$$

$$y = -\frac{10}{3}x + \frac{350}{3}$$

Calcula las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes y obtén la forma simétrica de la recta.

b) Para encontrar el precio en el cual no habrá consumo igualamos la ecuación a cero y despejamos *x*.

$$-\frac{10}{3}x + \frac{350}{3} = 0$$

$$3\left(-\frac{10}{3}x + \frac{350}{3}\right) = 3(0)$$

$$-10x + 350 = 0$$

$$-10x = -350$$

$$x = \frac{-350}{-10} = 35$$

A un precio de $35 no habrá demanda del producto.

www.elsolucionario.org

c) Para calcular el precio cuando la demanda del artículo es de 27 unidades. En la ecuación le damos a *y* el valor de 27 y despejamos *x*.

$$-\frac{10}{3}x+\frac{350}{3}=27$$

$$3\left(-\frac{10}{3}x+\frac{350}{3}\right)=3(27)$$

$$-10x+350=81$$

$$-10x=81-350$$

$$-10x=-269$$

$$x=\frac{-269}{-10}=26.90$$

A un precio de $26.90 habrá una demanda de 27 unidades.

Ejercicio 5

1. Traza la gráfica de las siguientes rectas mediante sus coordenadas al origen.

a) $3x-2y=-6$
b) $x+3y-6=0$
c) $4x-y-8=0$
d) $1.5x-0.5y=3$
e) $x-5y+10=0$
f) $2x+y=-5$

2. Expresa cada una de las siguientes rectas en forma simétrica.

a) Pasa por (2, –2) y $m=-\frac{3}{5}$
b) Pasa por (0, –3) con 30° de inclinación.
c) Pasa por (–4, 5) y (–1, –3)
d) $5x+2y-7=0$
e) $r=\frac{4}{3\cos\theta-5\operatorname{sen}\theta}$
f) $y=-5x-2$
g) Pasa por (–4, –3) y $m=-2$
h) Pasa por (0, –5) y (4, 4)

3. La ordenada al origen de una recta es el recíproco de su abscisa al origen y la recta pasa por el punto (–1, 5). ¿Cuál es su ecuación?

4. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son *A*(2, 5), *B*(–5, –1) y *C*(7, –4), encuentra la ecuación en forma simétrica de los tres lados.

Continúa...

www.elsolucionario.org

5. Un fabricante de zapatos vende en el mercado 50 000 pares a un precio de $320 cada uno y 38 000 pares a un precio de $280. Determina la ecuación de la oferta suponiendo que el precio (p) y la cantidad de pares ofertada (q) están relacionados linealmente.

6. Para alquilar un automóvil, Humberto paga $250 diarios y $3 adicionales por kilómetro.

a) Expresa el costo de alquiler en función de la cantidad de kilómetros recorridos.

b) Representa de manera gráfica la ecuación obtenida.

c) ¿Cuánto se debe pagar por alquilar un automóvil durante un día para un viaje de 70 km?

7. De acuerdo con los antropólogos, un hombre cuya tibia mide 39.25 cm de longitud tiene una altura de 175 cm; mientras que un hombre cuya tibia mide 46 cm de largo, tiene una altura de 193 cm.

a) Expresa la estatura de un hombre en función de la longitud de su tibia, suponiendo que están en relación lineal.

b) Traza la gráfica de la ecuación obtenida.

c) ¿Cuál es la estatura de un hombre cuya tibia tiene una longitud de 34.5 cm?

www.elsolucionario.org

8. Investiga en algún texto de Química cuál es la ley de Gay-Lussac.

La presión (P) (en pascales) de un volumen de gas se relaciona de forma lineal con la temperatura (T) (en grados Celsius), de acuerdo con la ley de Gay-Lussac. Un experimento determinó que si $T = 40$ K, $P = 90$ Pa, y si $T = 80$ K, $P = 100$ Pa.

a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que contiene los dos puntos?

b) ¿Qué significa la pendiente en este contexto?

c) Traza la gráfica de la recta que contiene estos puntos.

Ecuación normal

Veamos ahora una representación trigonométrica de la recta, a la cual se le llama **forma normal** de la línea recta.

Encuentra en la gráfica los valores solicitados.

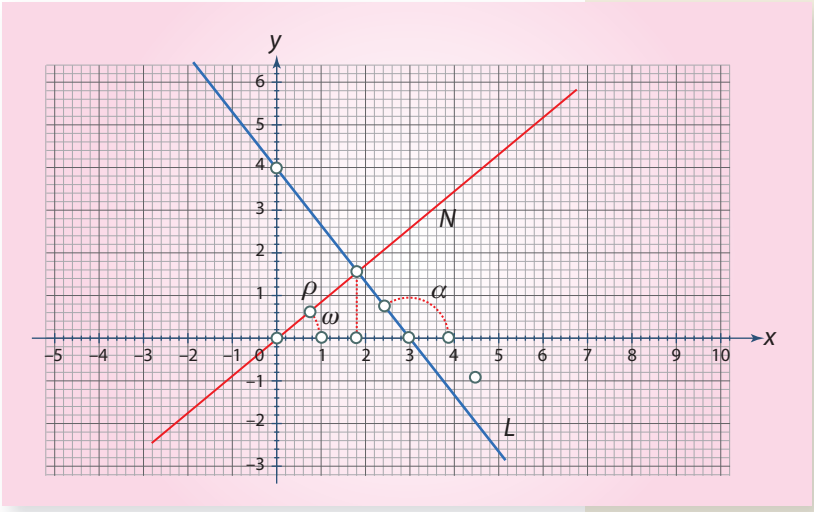
tan α = _____

cot ω = _____

ω = _____

α = _____

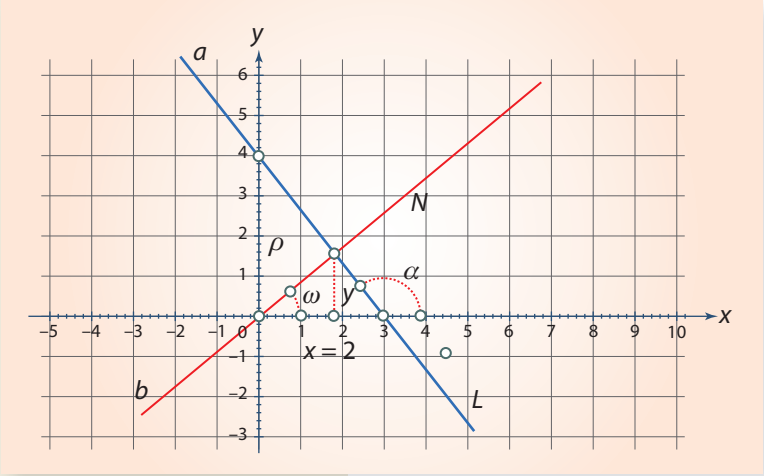
ρ = _____



¿Qué relación hay entre ω y α? _____

Veamos cómo podemos determinar la ecuación de una recta si conocemos la longitud de la perpendicular trazada desde ella al origen del plano cartesiano y el ángulo que forma esta perpendicular con el eje x.

www.elsolucionario.org



Sean (x_1, y_1) las coordenadas del punto de intersección de L y N.

Con las condiciones dadas en la gráfica son:

$$x_1 = \rho \cos \omega$$

$$y_1 = \rho \operatorname{sen} \omega$$

$\measuredangle \alpha = 90° + \omega$ tenemos:

$$\tan \alpha = -\cot \omega = -\frac{1}{\tan \omega}$$

Por lo que:

$$m_L = -\frac{1}{\tan \omega} = -\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}$$

Y la ecuación de la línea L la podemos expresar como:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \rho \operatorname{sen} \omega = -\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}(x - \rho \cos \omega)$$

$$\operatorname{sen} \omega (y - \rho \operatorname{sen} \omega) = -\cos \omega (x - \rho \cos \omega)$$

$$y \operatorname{sen} \omega - \rho \operatorname{sen}^2 \omega = -x \cos \omega + \rho \cos^2 \omega$$

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - \rho (\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega) = 0$$

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - \rho = 0$$

Que es la ecuación en **forma normal de la recta**.

Otra manera de obtener la **forma normal** de la recta es dividiendo término a término la ecuación de la recta entre $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Debemos considerar el siguiente criterio para asignar el signo del radical del denominador.

a) $C \neq 0$, $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ es de signo contrario a C.

b) Si $C = 0$, $B \neq 0$, $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ tiene el mismo signo que B.

c) $C = B = 0$, $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ tiene el mismo signo que A, entonces:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

www.elsolucionario.org

Comparando término a término:

$$x\cos\omega + y\,\text{sen}\,\omega - \rho = 0 \quad \text{con} \quad \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

De manera que podemos establecer lo siguiente:

$$\begin{cases} \cos\omega = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \\ \text{sen}\,\omega = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \\ \rho = \dfrac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$$

Ejemplo 19

Reduce a la forma normal la ecuación de la recta $3x - 4y - 6 = 0$ y obtén el valor de ρ y ω.

Solución

Sustituimos los valores de *A, B* y *C* de la ecuación por su **forma normal** y simplificamos.

$$\frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}x + \frac{-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}y + \frac{-6}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{9+16}}x - \frac{4}{\sqrt{9+16}}y - \frac{6}{\sqrt{9+16}} = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{25}}x - \frac{4}{\sqrt{25}}y - \frac{6}{\sqrt{25}} = 0$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

Para obtener el valor de ω consideramos los signos del cos ω (+) y del sen ω (–), los cuales nos indican que ω es un ángulo de IV cuadrante.

$$\omega = 2\pi - \text{arc cos}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= 2 \quad - 0.9273$$

$$= 5.3559 \text{ rad}$$

$$= 306° \; 52' \; 12''$$

Y el valor de ρ, lo obtenemos de la ecuación normal directamente:

$$-\rho = -\frac{6}{5}$$

$$\rho = \frac{6}{5}$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 20

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (–3, 2) y tiene una inclinación de 150° en su forma normal.

Solución

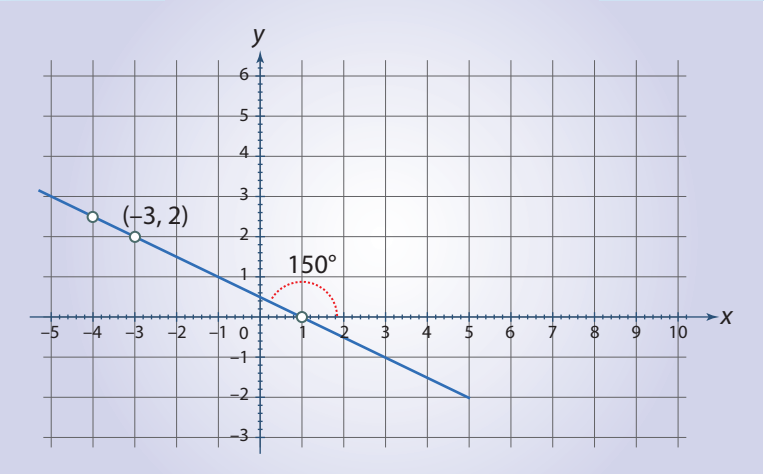
Obtenemos primero la ecuación general de la recta con las condiciones dadas.

Para (–3, 2) y una inclinación de 150°, tenemos:

$$m = \tan 150°$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto (–3, 2) con $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ es:



$$y - 2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3)$$

$$\sqrt{3}(y - 2) = -(x + 3)$$

$$\sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = -x - 3$$

$$x + \sqrt{3}y + \left(3 - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

Para obtener la forma normal de la recta:

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}}y + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+3}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}y + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}y + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = 0$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} = 0$$

www.elsolucionario.org

Una de las aplicaciones de la forma normal de la recta es que nos permite calcular la **distancia dirigida** de un punto a una recta, siendo el punto externo a la misma. Para obtener esa distancia se sustituyen las coordenadas del punto en la forma normal.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El signo del denominador es el contrario al del término C.

Cuando el punto (x_1, y_1) y el origen están del mismo lado de la recta, la distancia (d) es negativa; sin embargo, si están en distinto lado de la recta, la distancia (d) es positiva.

Ejemplo 21

Calcula la distancia de la recta $5x - 7y - 4 = 0$ al punto $(-3, 5)$.

Solución

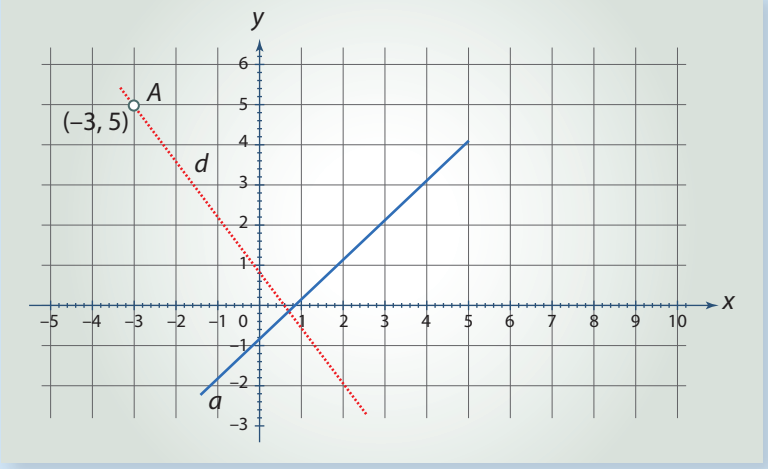
Sustituimos en la ecuación de la recta en su forma normal, las coordenadas del punto dado.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{5(-3) - 7(5) - 4}{\sqrt{5^2 + (-7)^2}}$$

$$= \frac{-15 - 35 - 4}{\sqrt{25 + 49}}$$

$$= -\frac{54}{\sqrt{74}}$$



Ejercicio 6

1. Traza en tu cuaderno las rectas AB para los valores de ρ y ω que se indican en cada inciso, y escribe su ecuación.

a) $\rho = 4,\ \omega = \frac{\pi}{3}$

b) $\rho = 7,\ \omega = \frac{\pi}{6}$

c) $\rho = 5,\ \omega = \frac{5\pi}{3}$

d) $\rho = 3,\ \omega = \frac{3\pi}{4}$

Continúa...

www.elsolucionario.org

e) $\rho = 8,\ \omega = \frac{8\pi}{3}$

f) $\rho = \frac{5}{2},\ \omega = \frac{7\pi}{4}$

2. Reduce a la forma normal cada una de las siguientes ecuaciones y obtén el valor de ρ y ω.

a) $3x - 5y + 6 = 0$

b) $y = \frac{x}{3} - 3$

c) $y - 1 = -2(x - 3)$

d) $5x + 4y + 20 = 0$

e) $y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$

f) $y - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)$

3. Expresa en forma general cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 5 = 0$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 8 = 0$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 25 = 0$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 7 = 0$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 16 = 0$

f) $-\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 12 = 0$

4. Calcula la distancia entre el punto y la recta dada en cada inciso.

a) $2x - 3y + 4 = 0$ y $(2, 7)$

b) $y = 5x + 2$ y $(0, -5)$

c) $7x + 3y - 11 = 0$ y $(-3, -4)$

d) $-4x - 6y - 21 = 0$ y $(3, -10)$

e) $x + 5y + 7 = 0$ y $(5, 8)$

f) $y = -2x - 21$ y $(-6, -11)$

5. Un médico para determinar la dosis infantil de cierto medicamento utiliza la regla de Cowling, la cual consiste en el producto de la dosis (*a*) para un adulto (en mg) y la veinticuatroava parte de la edad del paciente (*t*) aumentada en un año.

a) Obtén una ecuación lineal que relacione la dosis infantil (*y*) con la edad del paciente para una dosis (*c*) constante para un adulto.

b) ¿Cuál es la dosis de dicho medicamento para un niño de 7 años, si para un adulto es de una pastilla de 500 mg?

c) Expresa en forma normal la ecuación obtenida en el inciso *a*).

www.elsolucionario.org

2.3 INTERSECCIÓN DE RECTAS

En el primer curso de Matemáticas vimos distintos métodos para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas de primer grado, esta información será de mucha utilidad para el tema que vamos a estudiar a continuación.

Calcula las coordenadas para los puntos indicados y contesta las siguientes preguntas.

$y = 3x - 11$

x	–2	0	2	4	6
y					

$y = 4x - 15$

x	–2	0	2	4	6
y					

a) ¿Cuál es el valor de la coordenada y en $x = 0$ en las dos ecuaciones?

_____ y _____

b) ¿En qué punto se cortan las gráficas de las dos rectas?

_____

c) ¿Qué significado tiene el punto de intersección de las rectas representadas por las ecuaciones dadas?

_____

d) Traza la gráfica de las dos rectas en el mismo plano.

El punto de intersección de dos o más rectas lo obtenemos resolviendo en forma simultánea el sistema formado por ellas.

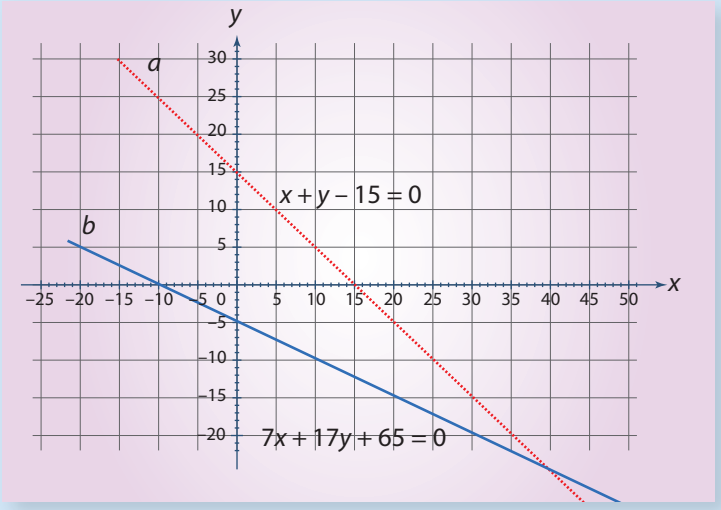
Veamos algunos ejemplos sobre cómo obtener un punto de intersección.

Ejemplo 22

Dos de los tres lados de un triángulo están definidos por las ecuaciones $x + y - 15 = 0$ y $7x + 17y + 65 = 0$, obtén las coordenadas del vértice donde se intersecan.

Solución

Representemos gráficamente las dos rectas en el plano para hallar su punto de intersección.



Continúa...

www.elsolucionario.org

Resolvamos el sistema por cualquiera de los métodos estudiados en el curso de Matemáticas 1, por ejemplo, el de eliminación por suma o resta.

$$\begin{aligned} x + y &= 15 \quad \text{.....A} \\ 7x + 17y &= -65 \quad \text{.....B} \end{aligned}$$

Multiplicando A por 7 y restando B.

$$\begin{aligned} 7x + 7y &= 105 \quad \text{.....A} \\ -7x - 17y &= 65 \quad \text{..... B} \\ -10y &= 170 \quad \text{.....C} \end{aligned}$$

Despejando y en C.

$$-10y = 170$$

$$y = \frac{170}{-10}$$

$$y = -17$$

Sustituyendo $y = -17$ en A.

$$x + y = 15$$

$$x + (-17) = 15$$

$$x - 17 = 15$$

$$x = 15 + 17$$

$$x = 32$$

Siendo el punto de intersección $(32, -17)$

Ejemplo 23

Obtén el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(-3, 4)$, $B(2, -7)$, $C(8, 2)$ y $D(1, 5)$.

Solución

Obtengamos las ecuaciones que representan a las dos diagonales del cuadrilátero dado.

Diagonal AC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = (4x + 8y - 6) - (32 + 2x - 3y) = 2x + 11y - 38 = 0$$

La ecuación de la recta que contiene la diagonal AC es:

$$2x + 11y - 38 = 0$$

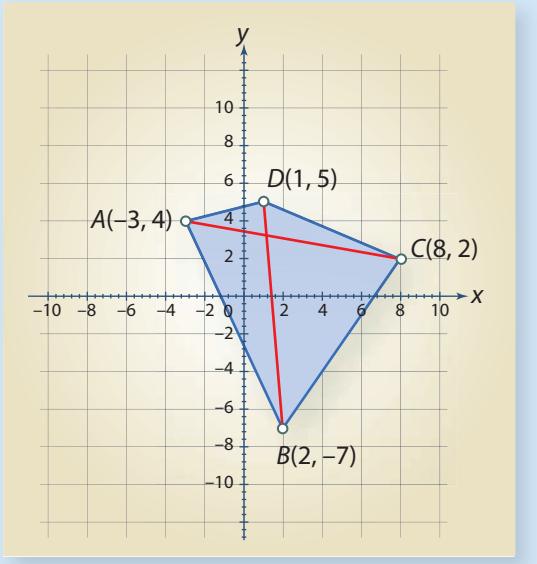
www.elsolucionario.org

Diagonal *BD:*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ 2 & -7 & 1 & 2 & -7 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-7x + y + 10) - (-7 + 5x + 2y) = -12x - y + 17 = 0$$

La ecuación de la recta que contiene la diagonal *BD* es:

$$12x + y - 17 = 0$$



Ahora, resolvamos el sistema por igualación.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 11y &= 38 \\ 12x + y &= 17 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &.....\text{A} \\ &.....\text{B} \end{aligned}$$

Despejando a *x* en A y en B.

$$x = \frac{38 - 11y}{2} \ldots\ldots\ldots \text{C} \qquad x = \frac{17 - y}{12} \ldots\ldots \text{D}$$

Igualando C y D:

$$\frac{38 - 11y}{2} = \frac{17 - y}{12} \ldots\ldots\ldots \text{E}$$

Resolviendo E para *y*:

$$\frac{12}{2}(38 - 11y) = 17 - y$$

$$228 - 66y = 17 - y$$

$$228 - 17 = -y + 66y$$

$$211 = 65y$$

$$\frac{211}{65} = y$$

Sustituyendo $y = \frac{211}{65}$ en C:

$$x = \frac{38 - 11y}{2}$$

$$= \frac{38 - 11\left(\frac{211}{65}\right)}{2}$$

$$= 19 - \frac{2\,321}{130}$$

$$= \frac{149}{130}$$

Punto de intersección de las diagonales

$$\left(\frac{149}{130}, \frac{211}{65}\right)$$

Aproximación en decimales:

(1.146, 3.246)

www.elsolucionario.org

Ejemplo 24

El costo de producir cierto artículo es de $45 por unidad y los costos fijos son de $343 diarios. El artículo se vende a $94 cada uno. ¿Cuántos artículos se deben producir y vender para garantizar que no haya ganancias ni pérdidas?

Solución

Este punto que se busca en particular se conoce con el nombre de **punto de equilibrio** y representa la cantidad de artículos que se venden para que los gastos que implican su producción sean igual al ingreso obtenido por su venta.

Para la obtención del punto de equilibrio formamos un sistema de ecuaciones, una de las ecuaciones representa los ingresos y la otra los gastos totales de producción, y lo resolvemos por cualquiera de los métodos conocidos.

Ingresos:

Sean:

x = Número de artículos producidos.

y = Ingresos obtenidos por su venta.

$y = 94x$

Sean:

x = Número de artículos producidos.

y = Costo total de producción (costo de producción + costos fijos).

$y = 45x + 343$

Como buscamos que los ingresos sean iguales que los egresos igualamos ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} 94x &= 45x + 343 \\ 94x - 45x &= 343 \\ 49x &= 343 \\ x &= \frac{343}{49} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

La producción diaria para que no haya pérdidas ni ganancia es de 7 artículos.

Si queremos saber el ingreso de la venta de estos siete artículos, sustituimos el valor encontrado en la ecuación de ingreso, aunque también lo podemos hacer con la ecuación de costos, ya que ambos deben ser iguales con esta producción.

$$\begin{aligned} y &= 94x \\ &= 94(7) \\ &= 658 \end{aligned}$$

Ejercicio 7

1. Encuentra el punto de intersección de las siguientes rectas.

a) $\left.\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ 3x - y &= -2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ m = \frac{5}{2} &\text{ y pasa por } (0, -6) \end{aligned}\right\}$

www.elsolucionario.org

c) Pasa por $(0,3)$ y $(-2,1)$ / $m = \frac{3}{4}$ y pasa por $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

d) Pasa por $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{3}{5}\right)$ / Pasa por $(2, 1)$ y $(-7, -2)$

e) $4x - 3y = 7$ / $x - 4y = 4$

f) $m = -\frac{3}{4}$ y pasa por $(1,-1)$ / Pasa por $(0,3)$ y $(3,4)$

2. Los costos fijos para producir cierto artículo son $5 328 al mes y los costos variables son $6 por unidad. Si el productor vende cada uno a $10.

a) Encuentra el punto de equilibrio.

b) Determina el número de unidades que se deben producir y vender al mes para obtener una ganancia de $15 000.

3. Un fabricante puede vender cierto producto a $150 por unidad. El costo total está formado por los costos fijos de $12 500 más los costos de producción de $85 por unidad.

a) ¿Cuántas unidades se deben vender para alcanzar el punto de equilibrio?

b) ¿Cuál es la utilidad o pérdida por la venta de 180 unidades?

4. Resuelve el siguiente problema mediante el uso de tablas y grafica las ecuaciones:

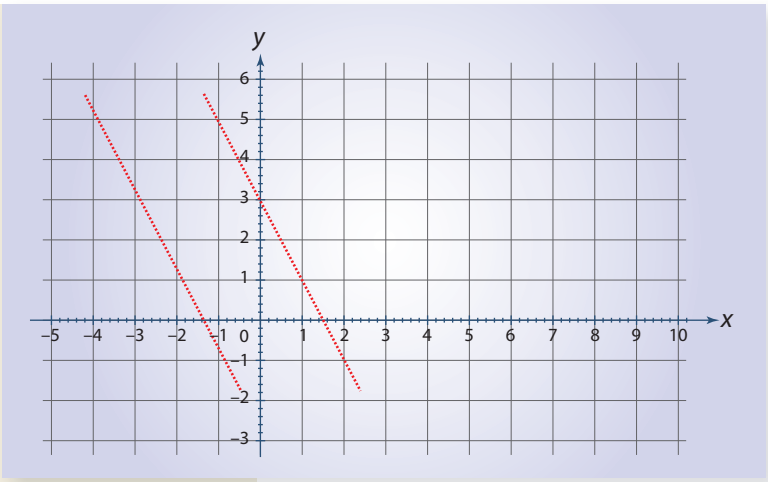
En un laboratorio biológico se le encomienda a un técnico suministrar cierta clase de bacterias a un científico que las está usando en un experimento. Encuentra la cantidad de equilibrio si la ecuación de demanda es $2x + 3y - 16 = 0$ y la ecuación de oferta es $10x - 8y = 11$, estando x en miles de bacterias y y en cientos de pesos.

2.4 RELACIÓN ENTRE RECTAS

Dos o más rectas pueden relacionarse entre sí debido a la posición de una con respecto a la otra. Observa esta relación en la siguiente actividad.

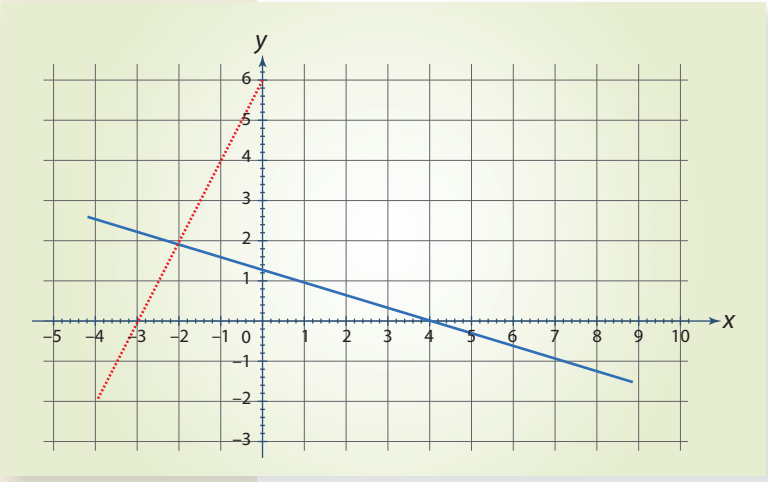
Relaciona cada una de las siguientes gráficas con su sistema de ecuaciones, para ello escribe el inciso correspondiente.

www.elsolucionario.org



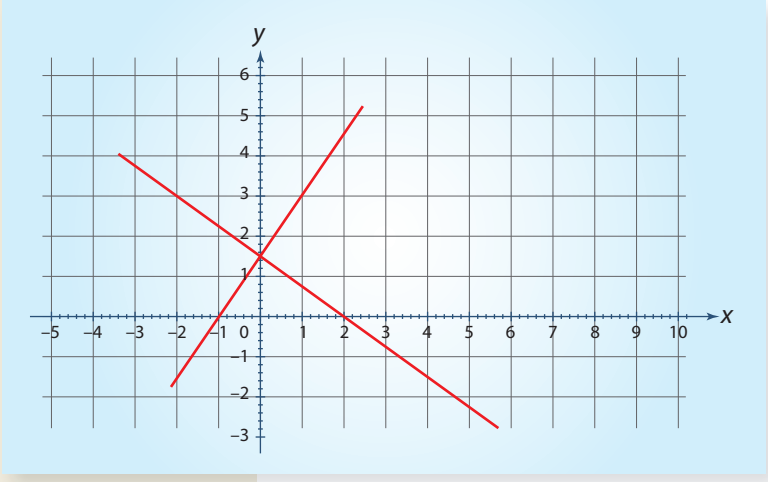
( )

a) $\left.\begin{matrix} x + 3y - 4 = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{matrix}\right\}$



( )

b) $\left.\begin{matrix} 5x - 2y + 4 = 0 \\ 15x - 6y + 12 = 0 \end{matrix}\right\}$

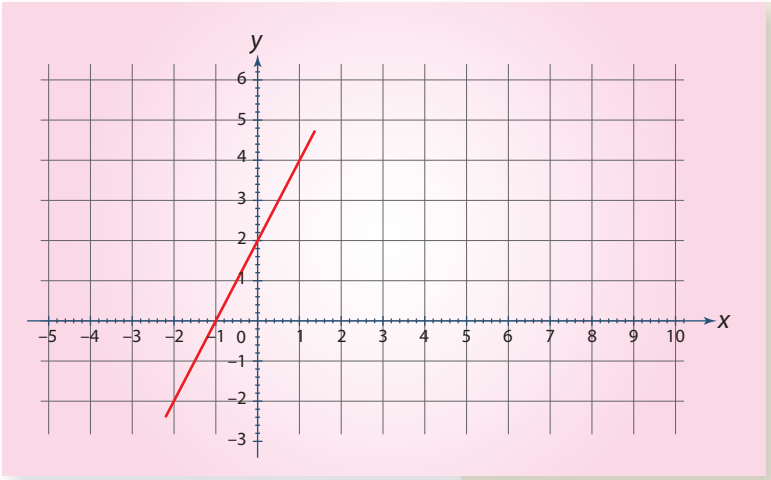


( )

c) $\left.\begin{matrix} 2x + y - 3 = 0 \\ 6x + 3y + 8 = 0 \end{matrix}\right\}$

www.elsolucionario.org

d) $\left.\begin{matrix} 5x - 3y + 4 = 0 \\ 3x + 5y - 7 = 0 \end{matrix}\right\}$



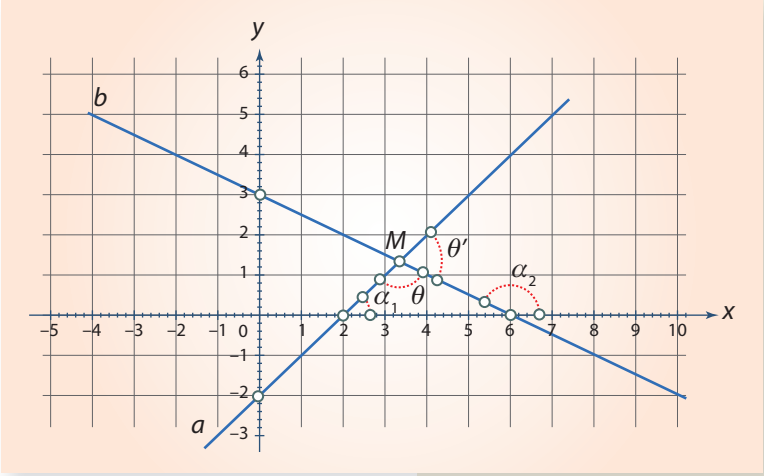
( )

Considerando la posición de dos rectas en el plano, ¿qué relación puede haber entre ellas?

_____

_____

Por su posición, dos rectas pueden ser paralelas o cortarse entre sí formando cuatro ángulos, los cuales son iguales dos a dos. Cada uno de un par es suplemento de los otros del otro par. Conocido uno de los cuatro se conocen todos. Si uno de ellos mide 90°, los tres ángulos restantes miden también 90° cada uno.



Si las rectas se cortan, el ángulo entre ellas (θ) es positivo y es el más pequeño que tiene su lado inicial sobre una de ellas y su lado final sobre la otra.

Para calcular la magnitud del ángulo entre dos rectas, consideramos el teorema geométrico *"Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes"*, por lo que:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$$

Y también:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

www.elsolucionario.org

Utilizando la identidad trigonométrica para la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}$$

Como la pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación, podemos expresar esta identidad en términos de la pendiente de las rectas que forman el ángulo:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

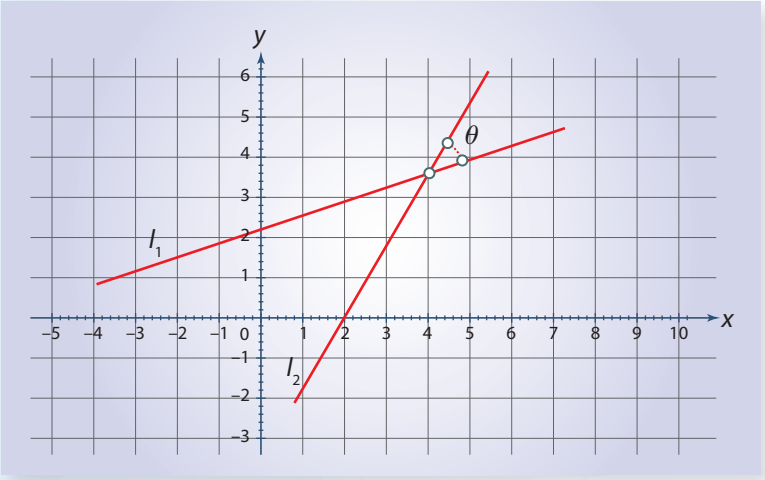
Si alguna de las dos rectas que forman el ángulo es vertical, esta relación no se puede utilizar y el estudio de la figura y la inclinación de la recta oblicua nos permiten calcular el ángulo buscado.

Ejemplo 25

Determina el valor del ángulo que forma la recta que pasa por los puntos (–3, 1) y (5, 4) y la recta $9x - 5y - 19 = 0$.

Solución

Tracemos una gráfica inicial de las dos rectas para determinar el menor de los dos ángulos que forman estas rectas.



Calculamos las pendientes de ambas rectas.

Para l_1: (–3, 1) y (5, 4).

$$m_1 = \frac{4-1}{5-(-3)} = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$$

Para l_2: $9x - 5y - 19 = 0$.

$$9x - 19 = 5y$$

$$\frac{9x - 19}{5} = y$$

$$y = \frac{9}{5}x - \frac{19}{5}$$

Siendo $m_2 = \frac{9}{5}$

www.elsolucionario.org

Ahora, calculamos la tangente de la diferencia de dos ángulos.

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\frac{9}{5} - \frac{3}{8}}{1 + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{9}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{57}{40}}{1 + \frac{27}{40}}$$

$$= \frac{\frac{57}{40}}{\frac{67}{40}}$$

$$= \frac{57}{67}$$

Para obtener el valor de θ obtenemos el arco cuya tangente $\frac{57}{67}$

$$\theta = \text{arc tan}\frac{57}{67}$$

$$= 40.3894°$$

$$= 40°\ 23'\ 22''$$

Ejemplo 26

El ángulo que forma l_1 cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$ con l_2 es de 120°. Calcula la pendiente de l_2.

Solución

Sustituimos los valores conocidos en la fórmula de tan θ y resolvemos para m_2.

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Continúa...

www.elsolucionario.org

$$\tan 120° = \frac{m_2 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)m_2}$$

$-\sqrt{3} = -1.732$

$$-1.732 = \frac{m_2 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}m_2}$$

$$-1.732\left(1 - \frac{1}{3}m_2\right) = m_2 + \frac{1}{3}$$

$$-1.732 + 0.5773\ m_2 = m_2 + \frac{1}{3}$$

$$-1.732 - \frac{1}{3} = m_2 - 0.5773\, m_2$$

$$-2.085 = 0.4227\ m_2$$

$$\frac{-2.085}{0.4227} = m_2$$

$$m_2 = -4.93$$

Si las dos rectas que se intersecan forman un ángulo de 90°, entonces los otros tres ángulos que se forman entre ellas también miden cada uno 90° y, por tanto, son perpendiculares y se cumple que:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$$

Por lo que:

$$\tan \alpha_2 = \tan (\alpha_1 + 90°)$$

$$= -\cot \alpha_1$$

$$= -\frac{1}{\tan \alpha_1}$$

En este caso, no se considera la situación de que una de las rectas sea vertical.

Para el caso de que las rectas no se corten entre sí, es decir que sean paralelas, entonces sus pendientes son iguales, ya que sus inclinaciones también lo son.

www.elsolucionario.org

En forma general, estas dos últimas condiciones las podemos expresar de la siguiente manera:

Sean l_1 y l_2 dos rectas no verticales en el mismo plano.

$$l_1 \parallel l_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$$

Y:

$$l_1 \perp l_2 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

O también:

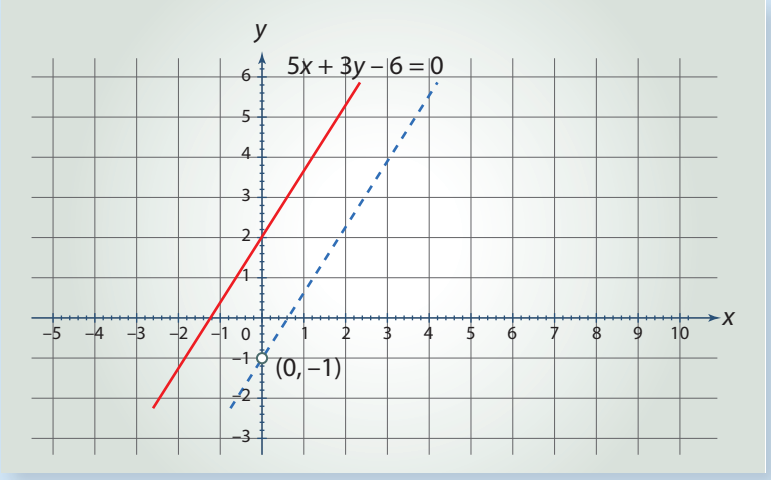
$$l_1 \perp l_2 \leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

Ejemplo 27

Obtén la ecuación de una recta paralela a $5x - 3y + 6 = 0$ que pase por el punto $(0, -1)$.

Solución

Tracemos la gráfica con las condiciones iniciales.



Primero calculamos la pendiente de la recta conocida, ya que como son paralelas, ambas deben tener la misma pendiente.

$$5x - 3y + 6 = 0$$

$$-3y = -5x - 6$$

$$y = \frac{-5x - 6}{-3}$$

$$y = \frac{5}{3}x + 2$$

Teniendo la pendiente y el punto por donde pasa, obtenemos la ecuación de la recta solicitada.

$$m = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad P(0, -1)$$

Continúa...

www.elsolucionario.org

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{5}{3}(x - 0)$$

$$3(y + 1) = 5x$$

$$3y + 3 = 5x$$

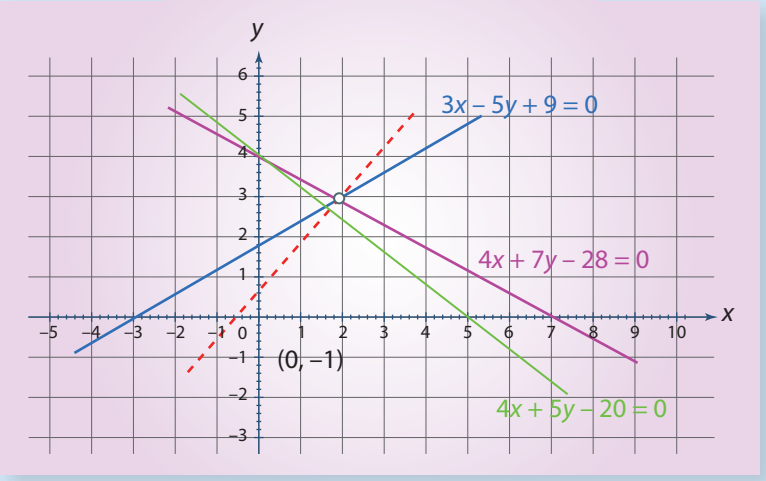
$$5x - 3y - 3 = 0$$

Ejemplo 28

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 5y + 9 = 0$ y $4x + 7y - 28 = 0$ perpendicular a la recta $4x + 5y - 20 = 0$.

Solución

Grafiquemos las condiciones iniciales del problema.



Obtengamos el punto de intersección de las rectas dadas:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= -9 \\ 4x + 7y &= 28 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\ldots\ldots A \\ &\ldots\ldots B \end{aligned}$$

Multiplicando A por 7 y B por 5 y luego sumándolo:

$$\begin{array}{rl} 21x - 35y &= -63 \\ 20x + 35y &= 140 \\ \hline 41x &= 77 \end{array} \quad \ldots C$$

www.elsolucionario.org

Resolviendo C para *x*:

$$41x = 77$$

$$x = \frac{77}{41}$$

Sustituyendo $x = \frac{77}{41}$ en A:

$$3\left(\frac{77}{41}\right) - 5y = -9$$

$$\frac{231}{41} - 5y = -9$$

$$-5y = -9 - \frac{231}{41}$$

$$= -\frac{600}{41}$$

$$y = \frac{-\frac{600}{41}}{-5}$$

$$= \frac{120}{41}$$

El punto de intersección es:

$$\left(\frac{77}{41}, \frac{120}{41}\right)$$

Obtenemos la pendiente de la recta y sustituimos en la condición de perpendicularidad para resolver para m_2.

$$4x + 5y - 20 = 0$$

$$5y = -4x + 20$$

$$y = \frac{-4x + 20}{5}$$

$$y = -\frac{4}{5}x + 4$$

Sustituyendo en la condición de perpendicularidad.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{-\frac{4}{5}}$$

$$m_2 = \frac{5}{4}$$

Teniendo la pendiente y el punto por donde pasa podemos hallar la ecuación de la recta solicitada:

$$m = \frac{5}{4} \qquad P\left(\frac{77}{41}, \frac{120}{41}\right)$$

Continúa...

www.elsolucionario.org

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{120}{41} = \frac{5}{4}\left(x - \frac{77}{41}\right)$$

$$4\left(y - \frac{120}{41}\right) = 5\left(x - \frac{77}{41}\right)$$

$$4y - \frac{480}{41} = 5x - \frac{385}{41}$$

$$41\left(4y - \frac{480}{41}\right) = 41\left(5x - \frac{385}{41}\right)$$

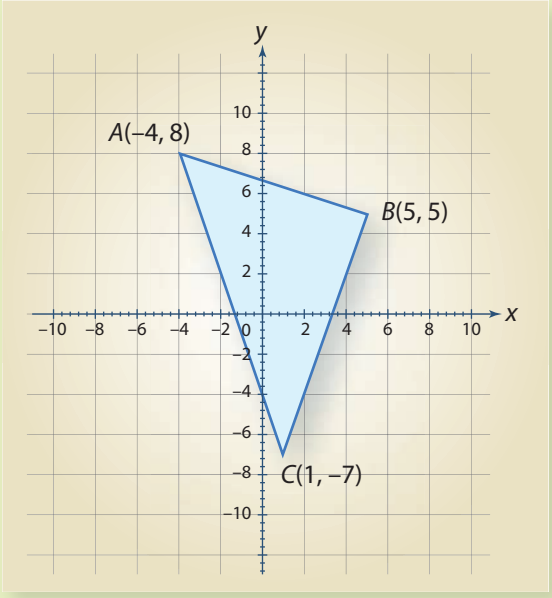
$$164y - 480 = 205x - 385$$

$$205x - 164y - 385 + 480 = 0$$

$$205x - 164y + 95 = 0$$

Ejercicio 8

Con base en el siguiente triángulo resuelve los ejercicios 1 a 6.



1. Encuentra la dimensión del ángulo B.
2. Encuentra la medida del ángulo A.
3. Utiliza el concepto de pendiente y determina qué tipo de triángulo es.
4. Obtén la ecuación de una recta paralela al lado AB que pasa por (6, –2).
5. ¿Cuál es el valor de x en el punto $(x, 3)$ para que la recta que pasa por él sea paralela al lado BC?
6. Calcula la ecuación de una recta perpendicular al lado CA y que pasa por su punto medio.
7. Utiliza el concepto de pendiente para demostrar que los puntos (2, –4), (6, 1) y (10, 6) son colineales.
8. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $x - y + 1 = 0$ y $2x + 3y - 18 = 0$ y además es perpendicular a la recta $\frac{x}{6} - \frac{y}{4} = 1$.

www.elsolucionario.org

9. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $x - 2y = 0$ y $2x - y - 2 = 0$, y además es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 4)$ y $(1, -5)$.

10. Encuentra el menor de los ángulos que se forman entre las rectas $4x - y + 5 = 0$ y $2x + 5y + 19 = 0$.

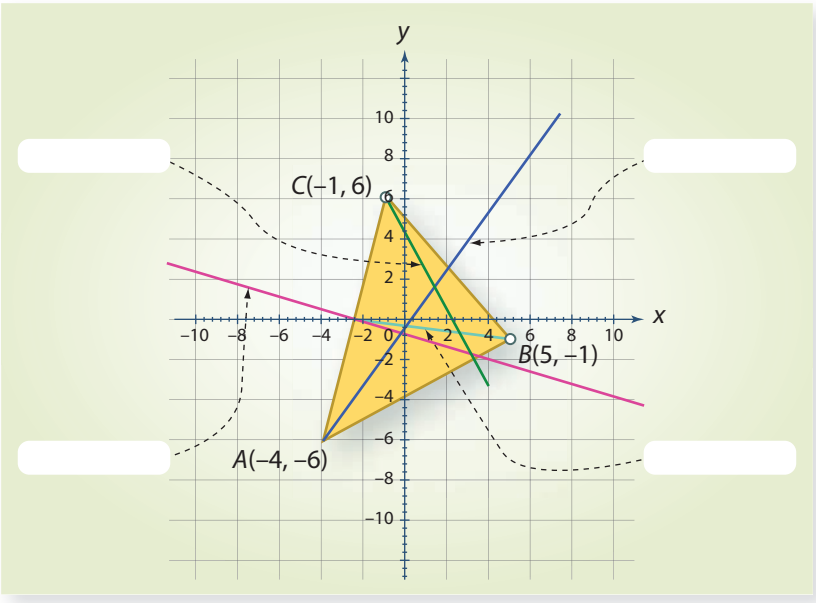
11. Formen equipos de cinco personas y discutan acerca de los conocimientos adquiridos para calcular la distancia entre dos rectas paralelas.

Comprueben su argumento calculando la distancia entre $3x - 4y + 4 = 0$ y $-12x + 16y - 4 = 0$.

Planteen otra pareja de rectas paralelas y calculen la distancia entre ellas.

2.5 RECTAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Ahora, recordemos algunos conceptos sobre triángulos vistos en el curso anterior, para ello nombra correctamente cada una de las líneas marcadas en el siguiente triángulo y contesta las preguntas que a continuación se hacen.



a) ¿Qué nombre recibe el punto de intersección de las medianas de un triángulo?

_____

b) ¿Cómo nombramos al punto de intersección de las alturas de un triángulo?

_____

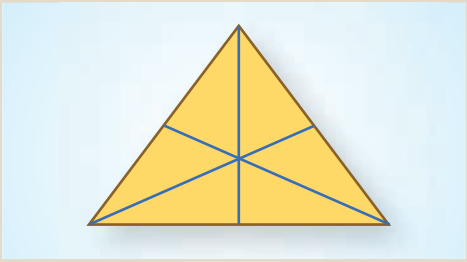
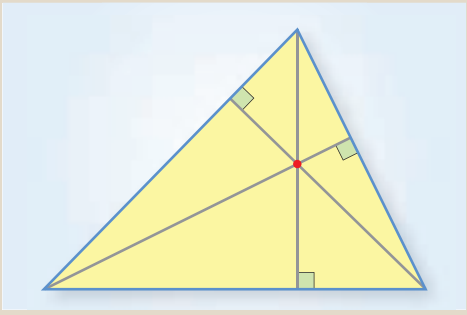
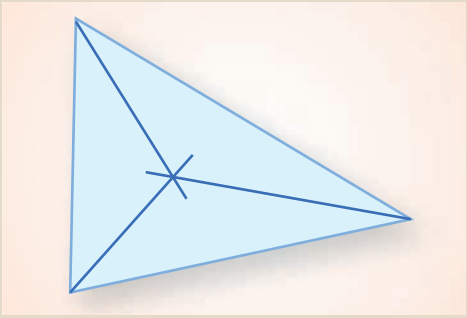
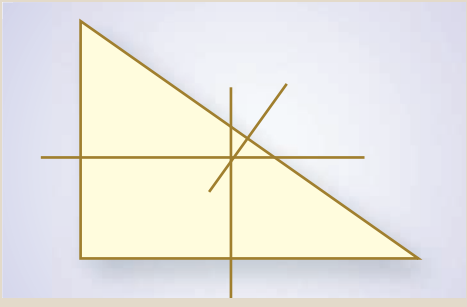
c) Las mediatrices de un triángulo se intersecan en un punto al que se le llama

_____

www.elsolucionario.org

d) ¿Cómo se llama el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo?

Resumamos la información que utilizaremos en este tema.

Línea notable del triángulo	Concepto	Diagrama	Punto de intersección	Observaciones
Mediana	Segmento que se traza desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.		Baricentro, centro de gravedad o centroide	Se localiza $\frac{2}{3}$ de cada mediana desde el vértice.
Altura	Perpendicular trazada desde uno de los lados del triángulo o de su prolongación al vértice opuesto.		Ortocentro	Está dentro del triángulo si éste es acutángulo, coincide con el vértice del ángulo recto si es rectángulo, y se halla fuera del triángulo si es obtusángulo.
Bisectriz	Segmento de recta que divide a cada ángulo interior de un triángulo en dos ángulos congruentes.		Incentro	Está a la misma distancia de los tres lados del triángulo.
Mediatriz	Perpendicular que pasa por el punto medio de un lado del triángulo.		Circuncentro	Equidista de los tres vértices del triángulo.

www.elsolucionario.org

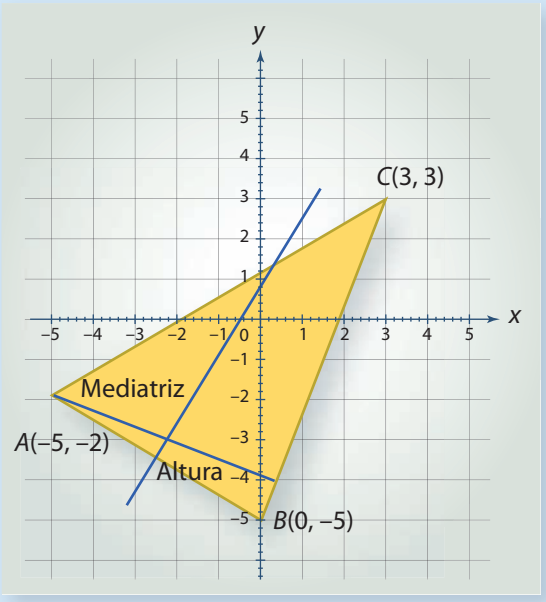
Veamos algunos problemas analíticos que involucran estos elementos.

Ejemplo 29

Obtén: a) la ecuación de la mediatriz del lado AB y b) la ecuación de la altura al vértice A del triángulo $A(-5, -2)$, $B(0, -5)$ y $C(3, 3)$.

Solución

Tracemos las condiciones iniciales.



a) Mediatriz del lado AB.

Calculamos la pendiente de AB. La recíproca inversa es la pendiente de la perpendicular.

$$m_{AB} = \frac{-5-(-2)}{0-(-5)} = \frac{-5+2}{0+5} = -\frac{3}{5} \quad \text{así,} \quad m_{\perp} = -\left(\frac{1}{-\frac{3}{5}}\right) = \frac{5}{3}$$

Ahora, buscamos el punto medio de AB.

$$Pm_{AB}\left(\frac{0+(-5)}{2}, \frac{(-5)+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{-5}{2}, \frac{-7}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

Con la pendiente calculada y las coordenadas del punto medio de AB, obtenemos la ecuación de la mediatriz.

$$y-\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{3}\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$y+\frac{7}{2} = \frac{5}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

$$3\left(y+\frac{7}{2}\right) = 5\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

$$3y+\frac{21}{2} = 5x+\frac{25}{2}$$

$$0 = 5x-3y+\frac{25}{2}-\frac{21}{2}$$

$$0 = 5x-3y+\frac{4}{2}$$

$$5x-3y+2=0$$

Continúa...

www.elsolucionario.org

b) Altura del vértice *A*.

Calculamos la pendiente del lado *BC*:

$$m_{BC} = \frac{3-(-5)}{3-0} = \frac{3+5}{3-0} = \frac{8}{3}$$

La pendiente de la altura es:

$$m_{\perp} = -\frac{1}{\frac{8}{3}} = -\frac{3}{8}$$

Con las coordenadas del vértice $A(-5, -2)$ y $m_{\perp} = -\frac{3}{8}$, obtenemos la ecuación de la altura.

$$y-(-2) = -\frac{3}{8}(x-(-5))$$

$$y+2 = -\frac{3}{8}(x+5)$$

$$8(y+2) = -3(x+5)$$

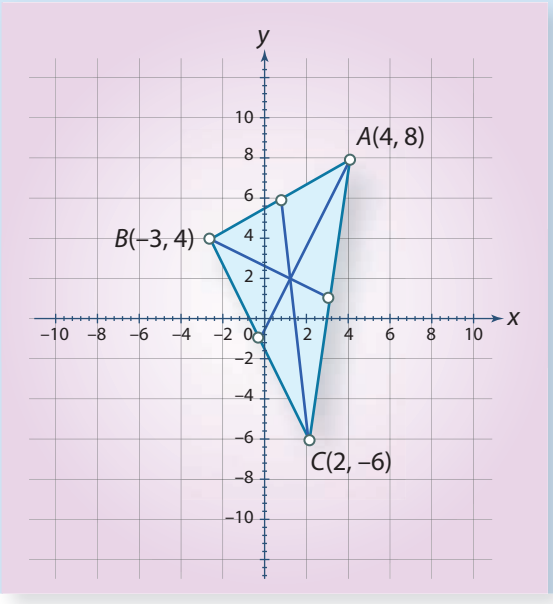
$$8y+16 = -3x-15$$

$$3x+8y+16+15 = 0$$

$$3x+8y+31 = 0$$

Ejemplo 30

Obtén las coordenadas del baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(4, 8)$, $B(-3, 4)$ y $C(2, -6)$.



Solución

Tracemos el triángulo dado por medio de sus vértices y las tres medianas de la figura, ya que el baricentro es su punto de intersección.

Para obtener las coordenadas del baricentro, primero determinamos las ecuaciones de dos de las tres medianas y obtenemos el punto de intersección; luego, resolvemos las ecuaciones en forma simultánea. Si tenemos duda sobre si la tercera mediana pasa por el mismo punto, podemos sustituir los valores calculados en la ecuación y ver si se cumple la igualdad.

www.elsolucionario.org

Calculemos el punto medio del lado BC:

$$Pm_{BC}\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{4+(-6)}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

Obtengamos el punto medio del lado AB:

$$Pm_{AB}\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{4+8}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, 6\right)$$

Ahora, obtengamos la pendiente de cada mediana.

$$m_{PA}=\frac{8-(-1)}{4-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{9}{\frac{9}{2}}$$
$$=\frac{18}{9}$$
$$=2$$

$$m_{QC}=\frac{-6-6}{2-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{-12}{\frac{3}{2}}$$
$$=-\frac{24}{3}$$
$$=-8$$

Con la pendiente obtenida y el punto medio determinamos la ecuación de cada una de las medianas.

$$y-(-1)=2\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$y+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$
$$y+1=2x+1$$
$$y=2x+1-1$$
$$y=2x$$

$$y-(6)=-8\left(x-\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$y-6=-8\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$y-6=-8x+\frac{8}{2}$$
$$y=-8x+4+6$$
$$y=-8x+10$$

Resolvamos por igualación el sistema que se forma con las ecuaciones de las medianas:

$$y=y$$
$$2x=-8x+10$$
$$2x+8x=10$$
$$10x=10$$
$$x=\frac{10}{10}$$
$$x=1$$

Para obtener el valor de y, sustituimos el valor de $x=1$ en cualquiera de las ecuaciones de las medianas:

$$y=2x$$
$$=2(1)$$
$$=2$$

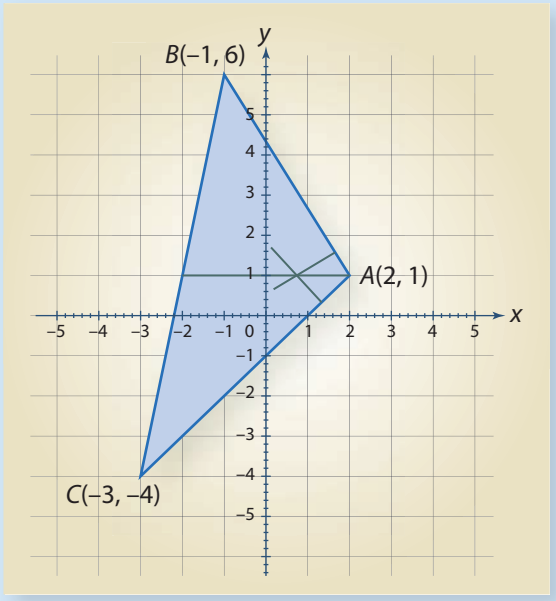
Corrobora que este punto pertenece a la tercera mediana, obteniendo su ecuación y sustituyendo en ella las coordenadas.

El baricentro es el punto de (1, 2).

www.elsolucionario.org

Ejemplo 31

Obtén la ecuación de la bisectriz del ángulo A en el triángulo $A(2, 1)$, $C(-3, -4)$ y $B(-1, 6)$.



Solución

Tracemos las condiciones iniciales del ejercicio para observar cómo está formado el ángulo A.

Obtengamos la ecuación de AC y la de AB.

Ecuación de AC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (-4x + 2y - 3) - (-8 + x - 3y)$$

$$= -5x + 5y + 5 = 0$$

Simplificando:

$$x - y - 1 = 0$$

Ecuación de AB:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (6x + 2y - 1) - (12 + x - y) = 5x + 3y - 13 = 0$$

Siendo la ecuación:

$$5x + 3y - 13 = 0$$

Como la bisectriz es la recta que divide en dos ángulos iguales el ángulo dado, los puntos que la forman son equidistantes a los dos lados del ángulo que dividen.

Para obtener la ecuación de esa bisectriz, igualamos la distancia dirigida de un punto (x, y) de la bisectriz a cada uno de los lados del ángulo.

$$-d_1 = -d_2$$

$$-\frac{x - y - 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = -\frac{5x + 3y - 13}{\sqrt{5^2 + 3^2}}$$

$$\frac{x - y - 1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{5x + 3y - 13}{\sqrt{25 + 9}}$$

$$\frac{x - y - 1}{\sqrt{2}} = \frac{5x + 3y - 13}{\sqrt{34}}$$

Recuerda que la distancia de un punto a una recta está dada por:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

www.elsolucionario.org

$$\sqrt{\frac{34}{2}}(x-y-1)=5x+3y-13$$

$$\sqrt{17}x-\sqrt{17}y-\sqrt{17}=5x+3y-13$$

Igualando a cero y reduciendo términos semejantes:

$$\left(\sqrt{17}-5\right)x-\left(\sqrt{17}+3\right)y+\left(13-\sqrt{17}\right)=0$$ . . . . . Ecuación de la bisectriz del ángulo *A*.

Ejercicio 9

1. En el triángulo *A*(0, 3), *B*(–4, 1) y *C*(5, –4) obtén:

a) La ecuación de la mediana del lado *AB*.

b) La ecuación de la altura al vértice *B*.

c) Las coordenadas del incentro.

d) Las coordenadas del baricentro.

2. En el triángulo formado por los puntos *F*(4, 3), *G*(–1, 1) y *H*(2, –4) obtén:

a) La ecuación de la mediatriz del lado *GH*.

b) La ecuación de la bisectriz del ángulo *F*.

c) Las coordenadas del ortocentro.

d) Las coordenadas del circuncentro.

3. En el triángulo *M*(–5, 4), *N*(–1, –2) y *P*(3, 6) obtén:

a) La ecuación de la bisectriz del ángulo *P*.

b) La ecuación de la altura al vértice *M*.

c) Las coordenadas del baricentro.

d) Las coordenadas del incentro.

4. En el triángulo *A*(3, –5), *B*(–4, 1) y *C*(–5, –2) obtén:

a) La ecuación de la mediana del lado *AC*.

b) La ecuación de la mediatriz del lado *BC*.

c) Las coordenadas del ortocentro.

d) Las coordenadas del circuncentro.

5. En el triángulo *K*(3, 0), *L*(7, 5) y *M*(–2, –1) obtén:

a) La ecuación de la mediatriz del lado *LM*.

b) La ecuación de la altura al vértice *M*.

c) Las coordenadas del incentro.

d) Las coordenadas del circuncentro.

6. Traza en tu cuaderno el triángulo de vértices *A*(–2, 6), *B*(3, 1) y *C*(7, 9) y localiza su ortocentro, baricentro y circuncentro. Comprueba por pendientes que los tres puntos están alineados y obtén la ecuación de la recta que los une, ¿con qué nombre se le conoce a esta recta?

www.elsolucionario.org

LECTURA SUGERIDA

Gráficas del movimiento rectilíneo

Revisa la siguiente lectura en Internet sobre movimientos.

http://www.profesorenlinea.cl/fisica/Movimiento_Graficas.html

Actividades a realizar

1. Lean de manera individual la lectura propuesta e indiquen qué gráficas se usan comúnmente para describir y estudiar el movimiento de objetos.
2. Contesten las siguientes preguntas:
   - *a*) ¿Son sinónimos distancia, espacio y desplazamiento?
   - *b*) ¿Qué significa que un movimiento sea rectilíneo y uniforme?
   - *c*) ¿Qué se obtiene cuando se grafica la distancia recorrida en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme?
   - *d*) ¿Qué representa la pendiente de la gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme?
   - *e*) ¿Qué representa la ordenada al origen de la gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme?
   - *f*) ¿Qué se obtiene cuando se grafica la velocidad en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme?
   - *g*) ¿Qué representa el área entre la gráfica de velocidad y el eje x?
   - *h*) ¿Qué se obtiene cuando se grafica la aceleración en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme?
   - *i*) ¿Qué representa una pendiente positiva y una negativa en la gráfica de distancia recorrida en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme cuando la ordenada al origen es mayor que cero?
   - *j*) Dos objetos parten del origen y se alejan de éste a distintas velocidades constantes. Si se grafica la distancia recorrida contra el tiempo, ¿qué gráfica tendrá una mayor pendiente?
   - *k*) Si se cuenta con la gráfica de distancia recorrida contra tiempo de un objeto, ¿cómo se obtiene gráficamente la velocidad de dicho objeto?
   - *l*) ¿Qué representa la abscisa al origen de la gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme?
3. Investiguen cómo se define el movimiento circular uniforme y qué analogía tiene con el movimiento rectilíneo uniforme.
4. Reúnanse en equipos y comenten sobre las diversas aplicaciones que tiene la línea recta tanto en problemas de la vida diaria como en disciplinas tales como la física y la economía.
5. Exponga cada equipo a sus demás compañeros lo que comentaron en el punto anterior.

www.elsolucionario.org

Recuperación de información

Cierre

I. Escribe en los paréntesis el inciso correspondiente.

1. ¿Cuál es la abscisa de un punto cuya ordenada es 7 para que la recta que pasa por él y por el punto $D(2, -1)$ tenga una pendiente de $-\frac{2}{3}$? . . . . ( )

a) 10 *b*) –10 *c*) 11 *d*) –11

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $D(-4, 3)$ y $E(-3, -2)$? . . . . . ( )

a) $5x - y + 17 = 0$ *b*) $5x + 7y + 17 = 0$

c) $5x + y + 17 = 0$ *d*) $5x - 7y + 17 = 0$

3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca el eje *y* en –2 y tiene pendiente 3? . . . . . ( )

a) $y = 2x - 3$ *b*) $y = 2x + 3$ *c*) $y = 3x + 2$ *d*) $y = 3x - 2$

4. Es una recta paralela a $5x - 3y + 4 = 0$. . . . . ( )

a) $y = \frac{3}{5}x + 4$ *b*) $3x - 5y + 2 = 0$

c) $5x + 3y + 7 = 0$ *d*) $y = \frac{5}{3}x - 15$

5. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a $4x - 3y + 1 = 0$? . . . . . ( )

a) $3x + 4y - 3 = 0$ *b*) $-3x + 4y + 5 = 0$

c) $4x + 3y + 5 = 0$ *d*) $3x - 4y + 1 = 0$

6. ¿Cuál es la intersección con el eje *x* de la recta $7x - 3y + 14 = 0$? . . . . . ( )

a) $\frac{14}{3}$ *b*) –2 *c*) $-\frac{14}{3}$ *d*) 2

7. Es la forma simétrica de la recta $4x - 5y + 20 = 0$. . . . . ( )

a) $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 0$ *b*) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$ *c*) $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 0$ *d*) $\frac{y}{4} - \frac{x}{5} = 1$

www.elsolucionario.org

8. Ecuación de la recta que pasa por (3, –1) y su pendiente $-\frac{3}{4}$ . . . . . .( )

a) $3x + 4y - 5 = 0$ *b*) $3x - 4y - 5 = 0$

c) $4x - 3y - 5 = 0$ *d*) $4x + 3y + 5 = 0$

9. Recta que pasa por el origen del plano cartesiano.. . . . . .( )

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ *b*) $4x + y - 3 = 0$ *c*) $y = 3x - 5$ *d*) $4x + 3y = 0$

10. ¿Cuál es la distancia no dirigida entre el punto (2, 1) y la recta $3x - y + 4 = 0$?. . . . . .( )

a) $\frac{9}{\sqrt{10}}$ *b*) $\frac{\sqrt{10}}{9}$ *c*) $\frac{9}{2}$ *d*) $\frac{7}{\sqrt{10}}$

11. Elabora un formulario con los elementos estudiados en esta unidad.

www.elsolucionario.org

Autoevaluación

Una forma en la que podemos evaluar nuestro desempeño al realizar una actividad, es revisar las acciones y actitudes que tenemos hacia la tarea que tenemos que desarrollar.

El siguiente cuestionario, tiene la finalidad de proporcionarte una guía para que revises críticamente tu participación en la actividad académica desarrollada y dado el caso, puedas hacer las correcciones necesarias.

Revisa tu desempeño en el aula y el trabajo en equipo con respecto a cada una de las acciones que se te proponen colocando una *X* en la columna que mejor describa tu participación de acuerdo al criterio indicado en el cuadro.

Aspecto a evaluar		Acciones	Criterios			
			Nunca	Casi nunca	La mayoría de las veces	Siempre
Forma de trabajo	Disciplina	Puse atención al profesor, seguí sus indicaciones y actué con respeto hacia él y mis compañeros.				
	Presentación	Elaboré mis trabajos con letra legible o usando herramientas computacionales (procesador de textos, hoja de cálculo, programa de presentaciones, etcétera).				
	Redacción	Redacté mis trabajos de forma que se entendieran sin problema mis argumentos y procedimientos y sin faltas de ortografía.				
	Orden	Presenté mis trabajos de manera ordenada sin saltarme pasos en las fechas indicadas.				
Trabajo en clase	Lectura de unidad	Leí la lectura de unidad y realicé las actividades indicadas en ella.				
	Participación en clase	Participé activamente en las clases y pregunté a mi profesor mis dudas.				
	Trabajo en equipo	Colaboré en las actividades que se realizaron por equipo.				
Trabajo fuera del aula	Estudio previo	Leí las secciones correspondientes del libro antes de la presentación de un tema nuevo por parte del maestro.				
	Tareas asignadas	Resolví los ejercicios propuestos y realicé las tareas y actividades extraclase asignadas por el profesor.				
	Investigación	Realicé las investigaciones indicadas en el libro y por el profesor.				

www.elsolucionario.org

Autoevaluación disciplinar

Elemento		Dominio	No dominio	Intenciones
Pendiente y ángulo de inclinación				
	Identifico la inclinación de una recta y puedo calcularla.			
	Determino la pendiente de una recta.			
	Interpreto correctamente el significado geométrico de la pendiente de una recta.			
Formas de la ecuación de una recta y sus transformaciones				
	Obtengo correctamente la ecuación punto-pendiente de una recta.			
	Determino correctamente la ecuación pendiente-ordenada al origen.			
	Expreso la ecuación de una recta en forma general.			
	Indico la ecuación de una recta en su forma simétrica.			
	Obtengo la ecuación de una recta dada en forma normal.			
	Aplico y distingo en situaciones lineales concretas la ecuación de una recta.			
Intersección de rectas				
	Localizo correctamente el punto de intersección entre dos rectas dadas.			
	Puedo calcular el punto de intersección entre dos rectas, aplicando métodos algebraicos.			
	Puedo interpretar en un contexto dado el significado del punto de intersección de dos rectas dadas.			

www.elsolucionario.org

Elemento		Dominio	No dominio	Intenciones
Relación entre rectas				
	Puedo obtener el ángulo que se forma entre dos rectas.			
	Puedo demostrar la relación de paralelismo entre dos rectas dadas.			
	Obtengo correctamente la ecuación de una recta dado un punto, su relación de paralelismo o perpendicularidad con otra recta.			
	Puedo determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares por medio de sus pendientes.			
Rectas notables del triángulo				
	Distingo correctamente cada una de las rectas notables de un triángulo.			
	Puedo obtener la ecuación de cualquiera de las rectas notables de un triángulo.			
	Puedo calcular las coordenadas del circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.			

www.elsolucionario.org

3 Unidad

LUGARES GEOMÉTRICOS. LAS CÓNICAS

www.elsolucionario.org

Competencias a desarrollar:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios, mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados, mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.

Contenido para aprender

3.1 Circunferencia

3.2 Parábola

3.3 Elipse

3.4 Hipérbola

Evaluación diagnóstica

Instrucciones: Escribe en el paréntesis el inciso que corresponda a la respuesta correcta.

1. Desarrollo de $(x+5)^2+(y-4)^2=49$. ( )

a) $x^2+y^2+10x-8y-8=0$ b) $x^2+y^2+5x-4y-8=0$

c) $x^2+y^2+10x-8y+8=0$ d) $x^2+y^2+5x-4y+8=0$

2. Factorización de $25x^2-30x+9$. ( )

a) $(5x+3)^2$ *b*) $(5x-3)^2$ *c*) $(25x-9)^2$ *d*) $(5x-9)^2$

3. Ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(1+\sqrt{3}, 3)$. ( )

a) 45° *b*) 60° *c*) 30° *d*) 15°

4. Punto de intersección de las rectas $2x-y-4=0$ y $2x+y-8=0$. ( )

a) (2, 3) *b*) (1, 6) *c*) (–2, –3) *d*) (3, 2)

5. Ordenada al origen de la recta $3x-2y+8=0$. ( )

a) 4 *b*) –4 *c*) 8 *d*) –8

6. Recta perpendicular a $4x+3y+6=0$ que pasa por el punto (8, –2). ( )

a) $4x+3y-26=0$ *b*) $3x+4y-16=0$

c) $3x-4y+32=0$ *d*) $3x-4y-32=0$

www.elsolucionario.org

7. Recta paralela a $2x + 3y + 4 = 0$ que pasa por el punto (6, 6). ( )

a) $3x - 2y + 6 = 0$ *b*) $3x + 2y - 30 = 0$

c) $2x + 3y - 30 = 0$ *d*) $2x - 3y + 6 = 0$

8. Valor absoluto de la distancia del punto (2, 1) a la recta $3x - 4y + 3 = 0$. ( )

a) 1 *b*) 0.2 *c*) 5 *d*) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

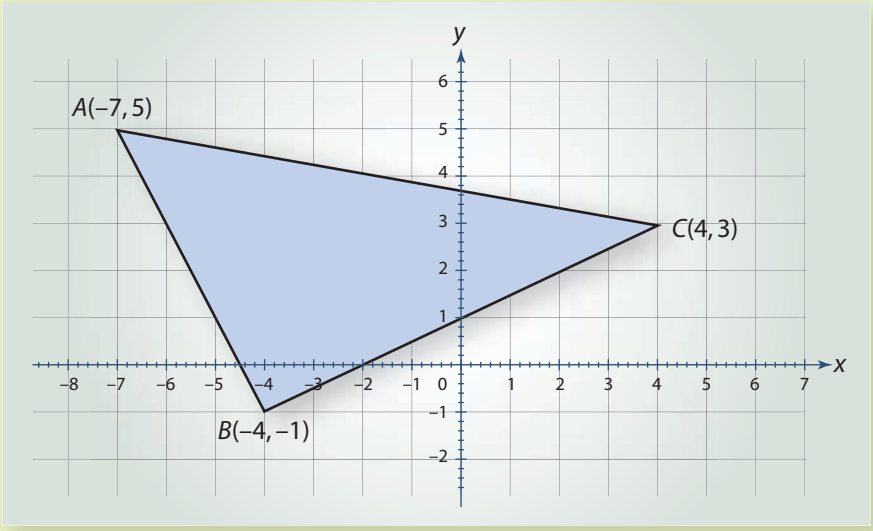
9. El menor de los ángulos que forman las rectas $3x - \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} = 0$ y $x - \sqrt{3}y + 10\sqrt{3} = 0$. ( )

a) 120° *b*) 60° *c*) 30° *d*) 150°

10. Distancia entre las rectas $x + y - 5 = 0$ y $x + y - 3 = 0$. ( )

a) 0.5 *b*) 2 *c*) 2 *d*) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Instrucciones: Resuelve los ejercicios, para ello considera el triángulo de vértices: $A(-7, 5)$, $B(-4, -1)$ y $C(4, 3)$.



1. Ecuación del lado *BC*. ( )

a) $x + 2y - 5 = 0$
b) $x - 2y + 2 = 0$
c) $2x + 11y - 41 = 0$
d) $2x + y - 4 = 0$

2. Longitud de la altura trazada al vértice *C*. ( )

a) 8.94 u
b) 6.7 u
c) 5.36 u
d) 9.42 u

3. Ecuación de la mediana trazada desde el vértice *A*. ( )

a) $4x + 7y - 7 = 0$ *b*) $7x - 4y - 1 = 0$

c) $4x - 3y + 6 = 0$ *d*) $3x + 7y - 3 = 0$

4. Calcula la medida del ángulo *A*. ( )

a) 40.5° *b*) 53.13° *c*) 59.6° *d*) 36.9°

5. Ecuación de la mediatriz de *AB*. ( )

a) $2x + 4y - 15 = 0$ *b*) $2x - 4y + 19 = 0$

c) $2x + y - 1 = 0$ *d*) $2x - 3y + 15 = 0$

www.elsolucionario.org

Tema integrador

Secuencia didáctica

Apertura

Secciones cónicas y nuestra realidad

En el siglo XVII, los matemáticos franceses Pierre Fermat y René Descartes trabajaron independientemente, por lo que tuvieron la idea de asignar coordenadas a las ecuaciones. El primero en publicar sus ideas fue René Descartes, en 1637, como apéndice en su obra filosófica *El discurso del método* en un capítulo llamado "Géométrie", por ello se le considera el fundador de la Geometría Analítica.

En 1650, el matemático Frans van Schooten, de Ámsterdam, preparó una edición comentada de la Géométrie, explicando en sus propias palabras lo que entendía de la teoría de Descartes. Siendo esta edición la que se hizo conocida y tuvo aceptación entre los matemáticos de su tiempo e influencia en el desarrollo de las matemáticas.

En los primeros años, el uso de los ejes cartesianos x, y se hacía de forma diferente a la actual; por ejemplo, los ejes no siempre se trazaban en forma perpendicular y era poco frecuente que se usaran números negativos. La versión definitiva de los sistemas coordenados como los usamos actualmente se debe a Isaac Newton, quien calculó muchas gráficas de ecuaciones de tercer grado.

Las curvas a las que se les llama **cónicas** (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) deben su nombre a la forma en la que se obtienen, mediante diferentes secciones de un cono circular recto. Y estas curvas fueron estudiadas en la Antigüedad por Apolonio de Perga (262-200 a. C.), que vivió en el siglo II a. C.

Fue también Descartes quien demostró que las secciones cónicas de Apolonio se hallan contenidas en un único conjunto de ecuaciones cuadráticas:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dado que las secciones cónicas incluyen las circunferencias de los antiguos astrónomos, las elipses de Kepler y la parábola utilizada por Galileo para describir la trayectoria de un proyectil, este descubrimiento de Descartes fue para los físicos una poderosa herramienta, sin la cual se habrían visto severamente limitados.

La aplicación que tienen estas curvas es muy variada, sólo tenemos que observar nuestro alrededor para hallar objetos de uso diario y en aplicaciones tecnológicas; por ejemplo, las ruedas de bicicletas y de automóviles, las tapas de frascos y los juegos mecánicos. Los cables de los puentes colgantes tienen forma parabólica. Los telescopios, los detectores de radar y los reflectores luminosos tienen formas parabólicas.

www.elsolucionario.org

En los faros de los coches se coloca la fuente de luz en el foco de la parábola, de modo que los rayos, al reflejarse en el fondo y en las paredes del faro, salen formando rayos paralelos. Las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas (el Sol se encuentra en uno de los focos). La excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0.0167. Los cometas y los satélites también describen órbitas elípticas. En el extremo contrario está el cometa Halley, cuya excentricidad es muy próxima a 1. En óptica y propagación de ondas se utilizan lentes elípticas. En diseño artístico es común encuadrar retratos y fotografías en un marco con forma elíptica.

Apertura	Desarrollo	Cierre
• Forma equipo con cuatro compañeros. • Lean con atención el texto proporcionado. • Comenten entre ustedes sus experiencias cotidianas con respecto a las líneas curvas que identificamos como cónicas. • Investiguen dos formas distintas de generar este tipo de líneas. • Busquen situaciones que puedan tener un comportamiento semejante a cada una de las cónicas o que al graficarlo se obtenga una curva de ese tipo.	• Investiga los siguientes conceptos: a) Definición analítica de la cada una de las siguientes curvas: Circunferencia Parábola Elipse Hipérbola b) Formas de representar la ecuación de cada una de las cónicas. c) Elementos característicos de cada una de las cónicas. • Investiga dos aplicaciones en procesos económicos, administrativos o sociales de las cónicas.	• Escribe en tu cuaderno las definiciones analíticas de cada una de las cónicas. • Comenten entre ustedes qué importancia tienen las cónicas y sus propiedades en nuestra vida cotidiana. • Traza en tu cuaderno cada una de las cónicas, señalando en su representación sus elementos.

Rúbrica

Categoría	Excelente	Bien	Regular	Oportunidad de desarrollo
Terminología y notación	Utiliza adecuadamente los conceptos de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, y las diferentes formas de presentar la ecuación de cada una estas curvas, empleando una notación correcta, permitiendo que la lectura de sus documentos sea de fácil entendimiento.	La utilización de conceptos de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola y las diferentes formas de presentar la ecuación de cada una de estas curvas y su notación es correcta en la mayoría de los documentos que produce; sin embargo, su lectura no siempre es fácil de entender.	No hace uso correcto de los conceptos de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola y las diferentes formas de presentar la ecuación de cada una de estas curvas y su notación.	Hay poco uso o uso inapropiado de los conceptos de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola y las diferentes formas de presentar la ecuación de cada una de estas curvas y su notación, en los documentos que produce hace que éstos sean parciales o incompletos.

www.elsolucionario.org

Categoría	Excelente	Bien	Regular	Oportunidad de desarrollo
Errores matemáticos	Por lo menos 90% de los procesos y sus soluciones no contienen errores matemáticos.	De 80 a 89% de los procesos y sus resultados no presenta errores matemáticos.	Entre 60 y 79% de los procesos y resultados que presenta en sus documentos están libres de errores matemáticos.	Más de 40% de los procesos y soluciones contienen errores matemáticos.
Orden y organización	Presenta todos sus documentos de manera ordenada, clara y organizada, facilitando su lectura.	La mayoría de sus documentos están redactados en forma clara y organizada siendo fáciles de leer.	En la mayoría de sus trabajos se detecta una falta de orden o de claridad, lo cual dificulta su lectura.	Los trabajos que presenta se ven descuidados y/o desorganizados. Es difícil saber la forma en que procesa la información y como se relaciona ésta.
Comunicación de resultados	Su comunicación es fluida y adecuada al contexto.	Su comunicación es adecuada con respecto al tema, pero le falta fluidez.	Utiliza expresiones cotidianas inadecuadas al comunicarse.	Presenta oportunidades de aumentar léxico y fluidez.

Propósito

Que los estudiantes interpreten, argumenten, comuniquen y resuelvan diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos que incluyan la representación de las cónicas en el plano cartesiano, para la resolución de situaciones contextualizadas de tipo social, natural, científico y tecnológico, participando de manera responsable a la solución de problemas de su entorno; favoreciendo el desarrollo de las competencias propias de la disciplina y genéricas contempladas en el marco común curricular.

¿Qué aprenderás?

- A identificar los elementos característicos de cada una de las cónicas, utilizando diferentes formas de representación.
- A graficar cada una de las cónicas utilizando estas representaciones en la resolución de ejercicios y problemas.
- A obtener, dada la gráfica de una cónica, su ecuación y viceversa.
- A reconocer a cada una de las cónicas por la forma de su ecuación en forma general.

¿Para qué te servirá?

Los conocimientos que adquieras te serán útiles para el estudio de algunos conceptos físicos como el tiro parabólico y las leyes del movimiento planetario; en geometría, para el cálculo de áreas y volúmenes por medio del cálculo integral, la interpretación geométrica de la ecuación de segundo grado y para comprender mejor los conceptos de líneas rectas tangente y normal a algunas curvas.

www.elsolucionario.org

Desarrollo

3.1 CIRCUNFERENCIA

El concepto analítico de circunferencia puede ejemplificarse como un conjunto de puntos equidistantes a otro punto fijo llamado **centro**, su aplicación es muy amplia en arte; por ejemplo, el trazo de la circunferencia origina muchas otras figuras, tal es el caso de un **trisquel** o **triskel**, símbolo celta que se piensa que representa la naturaleza.

Como actividad de apertura veamos el trazo de un trisquel básico.

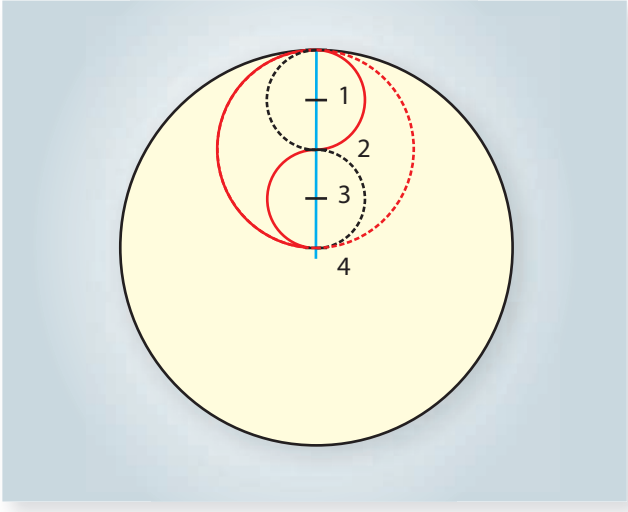
Como se acaba de mencionar, el trisquel o triskel es un símbolo presente en numerosas zonas, ligado fundamentalmente a la cultura celta. Su significado no está muy claro. Se cree que es una representación del fuego, el agua y la naturaleza. Otros lo relacionan con el Sol. Se ha dibujado de muchas maneras, pero siempre se conserva un mismo patrón: tres brazos equidistantes, inscritos en una circunferencia, y cuyo extremo inicial es el centro de la misma. Hay otras variedades con más brazos, entre las que destacan el cuatrisquel (cuatro brazos) y el hexasquel (con seis), aunque la más extendida es la forma de tres.

Sabiendo construir un trisquel de tres brazos, las demás variantes no tienen mayor dificultad.

1. Divide una circunferencia en tres partes y une el centro con cada uno de los extremos hallados (para hacerlo, lo más cómodo es dividirla en seis partes, usando el propio radio con el compás y luego cogemos las marcas alternas). Para el ejemplo, lo realizaré sólo sobre uno de los radios, pero el proceso es idéntico para los tres.

2. Toma el primero de los radios y divídelo en cuatro partes iguales, numeradas en el gráfico del 1 al 4, siendo esta última el centro de la circunferencia.

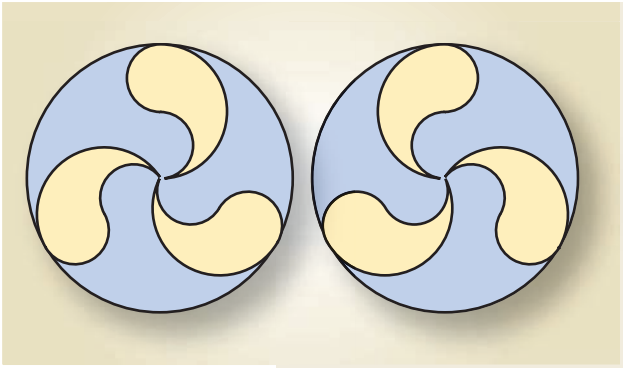
3. Haciendo centro en 2 traza media circunferencia, siendo el radio la distancia 2-4, es decir, la mitad del radio de la circunferencia grande. Puedes trazar esta media circunferencia, hacia la derecha o hacia la izquierda (ejemplo), con lo que conseguiremos que el trisquel "gire" hacia uno u otro lado.



www.elsolucionario.org

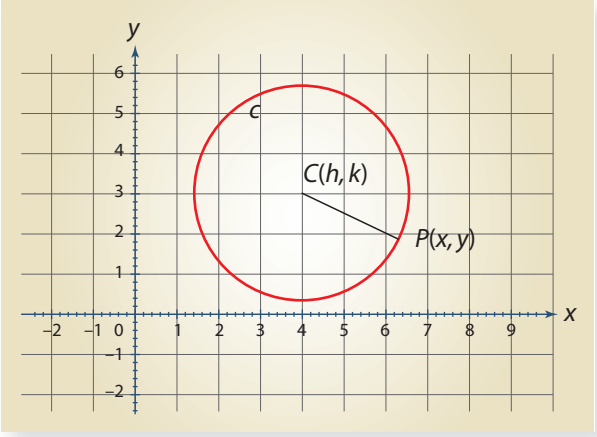
4. Con centro en 3 y radio 3-4 vuelve a trazar media circunferencia en el mismo sentido que la anterior. Y con centro en 1 y el mismo radio, otra media circunferencia, pero hacia el otro lado, con lo que quedará completo un brazo del trisquel.
5. Repite este proceso para los otros dos brazos y tendrás la figura terminada.

   Hay otras variantes de esta figura, invirtiendo el sentido de las formas, añadiendo brazos u otros elementos como botones centrales. Existe una gran cantidad de posibilidades de variación. Espero que la elaboración de este sencillo diseño te anime a buscar tus propios diseños.



Como puedes ver, por la actividad de apertura el uso que el ser humano le da a las ideas no es sólo en un campo específico, podemos tener muchas aplicaciones de un concepto determinado y siempre habrá alguna persona pensando en que más puede aplicar lo que aprende. Éste es el caso de la circunferencia, ahora preparémonos para un estudio más detallado de esta figura y las distintas formas en la ecuación que la representa.

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia constante de otro punto fijo al que llamamos **centro**. La distancia constante es el **radio** de la circunferencia.



Llamemos $C(h, k)$ a las coordenadas del centro y $P(x, y)$ a un punto cualquiera de la circunferencia.

El radio de la circunferencia es entonces la distancia entre el centro y el punto dado de la circunferencia.

Por lo que estudiamos en la primera unidad, tenemos que:

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

o también:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta última expresión la conocemos como forma ordinaria de circunferencia.

www.elsolucionario.org

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en (3, –3) y radio 5.

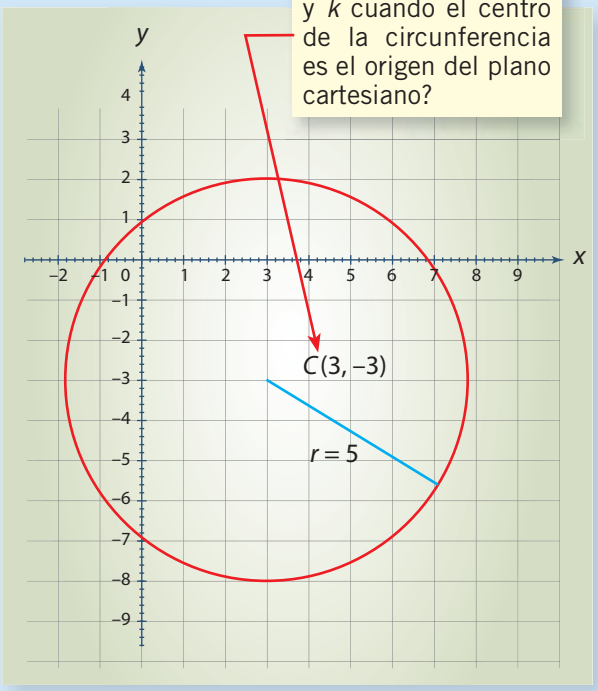
Solución

Tracemos los datos en un plano cartesiano para tener una gráfica inicial de nuestro ejercicio.

Sustituyamos en la ecuación ordinaria de la circunferencia los datos del ejercicio:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-3)^2+(y-(-3))^2=5^2$$
$$(x-3)^2+(y+3)^2=25 \quad \text{Ecuación ordinaria}$$
$$x^2-6x+9+y^2+6y+9=25$$
$$x^2+y^2-6x+6y+(9+9-25)=0$$
$$x^2+y^2-6x+6y-7=0 \quad \text{Ecuación general}$$

¿Qué valores toman h y k cuando el centro de la circunferencia es el origen del plano cartesiano?



Ejemplo 2

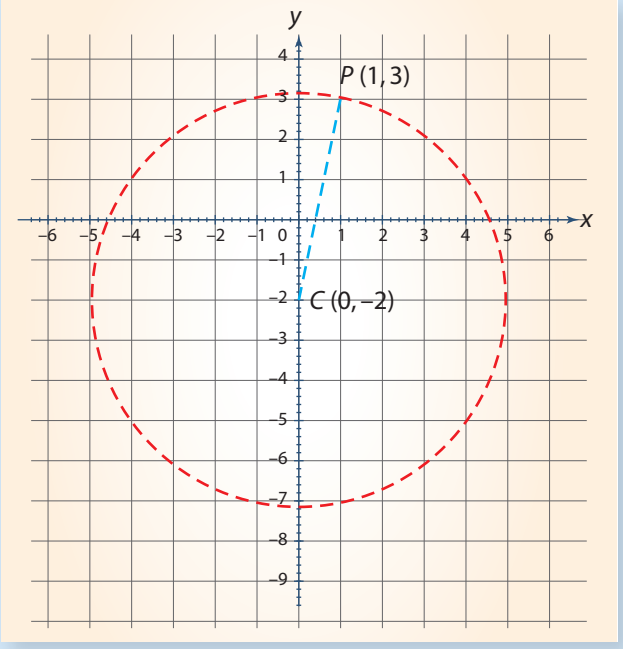
Obtén la ecuación de la circunferencia con centro en (0, –2) y que pasa por el punto (1, 3).

Solución

Tracemos las condiciones iniciales del ejercicio.

Para calcular la longitud del radio podemos sustituir las coordenadas de ambos puntos en la ecuación ordinaria de la circunferencia,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(1-0)^2+(3-(-2))^2=r^2$$
$$1^2+5^2=r^2$$
$$1+25=r^2$$
$$r^2=26$$



www.elsolucionario.org

Ahora, sustituimos el valor de r^2 y las coordenadas del centro en la ecuación ordinaria de la circunferencia.

$$(x-0)^2+(y-(-2))^2=26$$

$$x^2+(y^2+2)^2=26 \quad \text{Ecuación ordinaria}$$

$$x^2+y^2+4x+4=26$$

$$x^2+y^2+4y+(4-26)=0$$

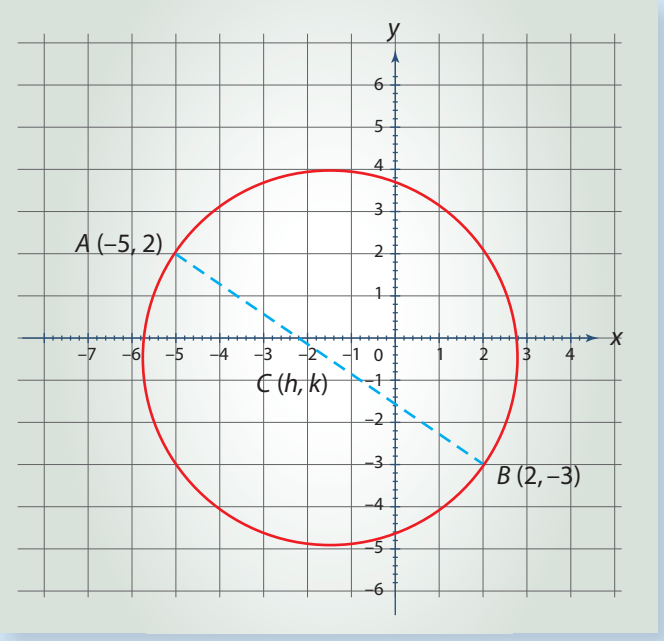
$$x^2+y^2+4y-22=0 \quad \text{Ecuación general}$$

Ejemplo 3

Obtén la ecuación de la circunferencia en la que los extremos de un diámetro son los puntos (–5, 2) y (2, –3).

Solución

Tracemos las condiciones iniciales del ejercicio.



Como los puntos dados son los extremos de un diámetro de la circunferencia, las coordenadas del centro serán las coordenadas del punto medio de ese segmento.

$$\text{Centro} = Pm_{AB}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-5+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

La longitud del radio es la mitad del diámetro, así que podemos calcular su valor como la mitad de la distancia entre los dos puntos dados.

$$r = \frac{1}{2}d_{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2-(-5))^2+(-3-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2+5)^2+(-3-2)^2}$$

Continúa...

www.elsolucionario.org

$$= \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + (-5)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{49 + 25}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{74}$$

Con las coordenadas del centro y la longitud del radio podemos obtener la ecuación de la circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\left[x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^2 + \left[y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{74}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(74)$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{74}{4} \quad \text{. . . . . Ecuación ordinaria}$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{37}{2}$$

$$x^2 + y^2 + 3x + y + \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{37}{2}\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 3x + y - \frac{33}{2} = 0$$

$$2\left(x^2 + y^2 + 3x + y + \frac{33}{2}\right) = 2(0)$$

$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 2y - 33 = 0 \quad \text{. . . . . Ecuación general}$$

Ejemplo 4

Obtén la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $2x + y - 8 = 0$ y cuyo centro está en el punto $(-5, 3)$.

Solución

Tracemos las condiciones iniciales del ejercicio.

www.elsolucionario.org

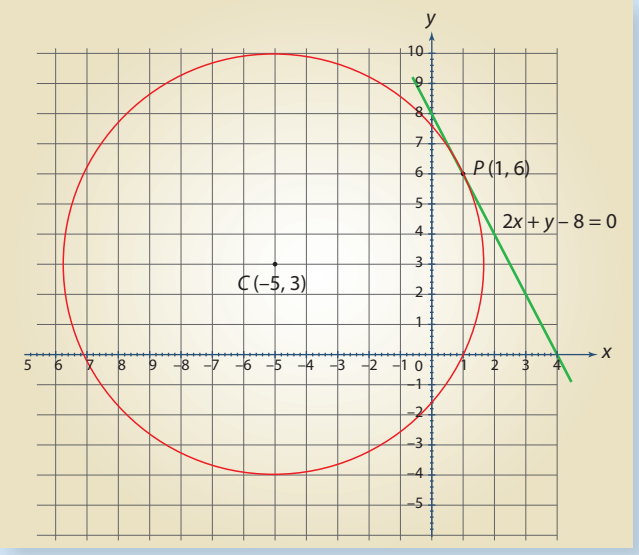
En este caso, el radio es la distancia del centro a la recta, la cual es tangente de la circunferencia. Calculemos su longitud:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{2(-5) + 1(3) - 8}{\sqrt{2^1 + 1^2}}$$

$$= \frac{-10 + 3 - 8}{\sqrt{4+1}}$$

$$= -\frac{15}{\sqrt{5}}$$



Con la distancia que calculamos y las coordenadas del centro podemos obtener la ecuación de la circunferencia que nos interesa.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - (-5))^2 + (y - 3)^2 = \left(-\frac{15}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = \frac{225}{5} \quad \text{. . . . . Ecuación ordinaria}$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 45$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y + (25 + 9 - 45) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y - 11 = 0 \quad \text{. . . . . Ecuación general}$$

Ejercicio 1

1. En cada uno de los siguientes ejercicios se indica las coordenadas de su centro y la longitud de su radio, obtén la ecuación de cada una de ellas.

a) $C(0, 7)$ y $r = 4$

b) $C(5, 2)$ y $r = 6$

c) $C(1, -4)$ y $r = 5$

d) $C(-4, -2)$ y $r = 2$

e) $C(0, 0)$ y $r = 7$

f) $C(0, -4)$ y $r = 1$

Continúa...

www.elsolucionario.org

2. Obtén la ecuación de cada una de las siguientes circunferencias de las cuales sabemos las coordenadas de su centro y un punto por donde pasa.

a) $C(2, -3)$ y pasa por $(-2, 7)$

b) $C(-3, 0)$ y pasa por $(4, -2)$

c) $C(-4, -2)$ y pasa por $(-2, -5)$

d) $C(0, 1)$ y pasa por $(7, 3)$

e) $C(0, 0)$ y pasa por $(3, -2)$

f) $C(0, -3)$ y pasa por $(-4, 0)$

3. En cada uno de los siguientes ejercicios se dan las coordenadas de los extremos de uno de sus diámetros. Obtén la ecuación de cada una de ellas.

a) $A(-4, 3)$ y $B(4, -1)$

b) $A(-1, -3)$ y $B(1, 2)$

c) $G(2, -4)$ y $H(6, 0)$

d) $P(-2, 3)$ y $Q(3, -2)$

e) $K(-5, 0)$ y $L(0, 6)$

f) $R(-3, -4)$ y $S(5, -6)$

4. En los siguientes ejercicios se da la ecuación de una recta tangente a una circunferencia y las coordenadas de su centro, obtén su ecuación.

a) Tangente a $3x - 4y + 6 = 0$
Centro en $(0, -4)$

b) Tangente a $x + 2y + 4 = 0$.
Centro en $(1, 3)$.

c) Tangente a $4x - 3y - 12 = 0$.
Centro en $(1, -4)$.

d) Tangente a $-3x - 5y + 15 = 0$.
Centro en $(-2, -3)$

e) Tangente a $3x + 2y + 6 = 0$.
Centro en $(-2, -5)$.

f) Tangente a $6x - 2y + 18 = 0$.
Centro en $(0, 0)$.

5. Obtén la ecuación que representa la trayectoria de un avión que se mantiene sobrevolando el aeropuerto de la ciudad de Toluca a una distancia constante de 7 km de la torre de control, esperando las instrucciones para aterrizar.

6. En una feria, uno de los juegos mecánicos consiste en cuatro tazas que giran y a su vez describen una trayectoria circular. Obtén la ecuación que representa esa trayectoria si sabemos que el diámetro del juego es de 8 m. ¿Cuál será la ecuación de la circunferencia de cada taza del juego si su radio es de 1.5 m?

www.elsolucionario.org

7. En un camellón se colocaron dos aspersores, que cubren sin traslaparse cada uno un radio de 3 m. Considerando como centro la posición de uno de ellos, ¿cuál es la ecuación de la circunferencia de riego de cada uno de ellos?

Obtención de los elementos de una circunferencia partiendo de su ecuación general

Como hemos visto hasta ahora, la forma general que tiene la ecuación de una circunferencia es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde: $A = C$.

La cual la podemos reducir a su forma ordinaria, utilizando el recurso algebraico de la factorización, completando trinomios cuadrados perfectos.

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . . . . . Ecuación general de la circunferencia

$\frac{Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F}{A} = \frac{0}{A}$ . . . . . Dividiendo entre A

$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$ . . . . . Simplificando

$\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + \left(y^2 + \frac{E}{A}y\right) = -\frac{F}{A}$ . . . . . Agrupando términos semejantes

$\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right) + \left(y^2 + \frac{E}{A}y + \left(\frac{E}{2A}\right)^2\right) = -\frac{F}{A} + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(\frac{E}{2A}\right)^2$ . . Completando TCP

Este término es la mitad del coeficiente del término lineal.

$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = -\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$ . . Factorizando

$\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{E}{2A}\right)\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$ . . . . . Simplificando

www.elsolucionario.org

De esta expresión podemos obtener las coordenadas del centro y la longitud del radio por comparación con la forma ordinaria, así:

$$h = -\frac{D}{2A} \quad k = -\frac{E}{2A} \quad \text{y} \quad r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \text{ es decir, } r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$$

Veamos en dos ejemplos como obtener los elementos de una circunferencia por los dos métodos descritos: factorización y relación con los coeficientes de la ecuación de la circunferencia en su forma general.

∫ Ejemplo 5

Obtén las coordenadas del centro y la longitud del radio de una circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$$

Solución

Obtengamos los valores solicitados mediante el recurso de factorización.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Ecuación dada}$$
$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Agrupando términos semejantes}$$
$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 5 + 4 + 9 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ Completando TCP}$$
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 18 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Factorizando}$$

De esta última expresión que representa la forma ordinaria de la circunferencia dada, obtenemos los datos solicitados.

Centro: $C(-2, 3)$

Si $r^2 = 18$, entonces, $r = \sqrt{18}$

∫ Ejemplo 6

Obtén las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

Solución

En este ejemplo vamos a usar las relaciones que establecimos mediante la factorización de la ecuación general de la circunferencia y los coeficientes de la ecuación general, así que recordemos esta relación:

$$h = -\frac{D}{2A} \quad k = -\frac{E}{2A} \quad \text{y} \quad r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \text{ es decir, } r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$$

www.elsolucionario.org

Así, tomemos la ecuación dada en el texto del ejercicio:

$$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

En donde:

$$A = C = 3,\ D = -6,\ E = 4 \text{ y } F = -3$$

Sustituyendo los valores de A, D, E y F en las relaciones para h, k y r tenemos:

$$h = -\frac{(-6)}{2(3)} \qquad k = -\frac{(4)}{2(3)} \qquad r = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (4)^2 - 4(3)(-3)}}{2(3)}$$

$$h = \frac{6}{6} \qquad = -\frac{4}{6} \qquad = \frac{\sqrt{36 + 16 + 36}}{6}$$

$$= 1 \qquad = -\frac{2}{3} \qquad = \frac{\sqrt{88}}{6}$$

$$= 1 \qquad = -\frac{2}{3} \qquad = \frac{\sqrt{22}}{3}$$

Con estos resultados podemos decir que:

$$C\left(1, -\frac{2}{3}\right) \quad \text{y} \quad r = \frac{\sqrt{22}}{3}$$

Ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos

Para obtener la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos, podemos establecer un sistema de ecuaciones simultaneas en las que las incógnitas serán los coeficientes de los términos lineales y el término independiente siendo entonces la tarea encontrar el valor que satisfaga las tres ecuaciones así obtenidas, vemos este método mediante un ejemplo.

Ejemplo 7

Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 0)$ y $C(0, -2)$.

Solución

Sustituyamos las coordenadas de cada uno de los puntos dados en la ecuación general de la circunferencia, con lo que formaremos un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas D, E y F.

Continúa...

www.elsolucionario.org

Para $A(-2, 1)$:

$$(-2)^2 + (1)^2 + D(-2) + E(1) + F = 0$$
$$4 + 1 - 2D + E + F = 0$$
$$5 - 2D + E + F = 0$$
$$-2D + E + F = -5 \ldots A$$

Para $B(3, 0)$:

$$(3)^2 + (0)^2 + D(3) + E(0) + F = 0$$
$$9 + 0 + 3D + 0E + F = 0$$
$$9 + 3D + F = 0$$
$$3D + F = -9 \ldots B$$

Para $C(0, -2)$:

$$(0)^2 + (-2)^2 + D(0) + E(-2) + F = 0$$
$$0 + 4 + 0D - 2E + F = 0$$
$$4 - 2E + F = 0$$
$$-2E + F = -4 \ldots C$$

Siendo el sistema que vamos a resolver:

$$\left.\begin{array}{r} -2D + E + F = -5 \\ 3D \quad\quad + F = -9 \\ -2E + F = -4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots\ldots A \\ \ldots\ldots B \\ \ldots\ldots C \end{array}$$

Resolvamos el sistema por reducción por suma o resta.

Multipliquemos A por 3 y B por 2 y sumemos:

$$\begin{array}{r} -6D + 3E + 3F = -15 \\ 6D + 2F = -18 \\ \hline 3E + 5F = -33 \end{array}$$

El nuevo sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} -2E + F = -4 \\ 3E + 5F = -33 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots\ldots C \\ \ldots\ldots D \end{array}$$

Multipliquemos C por 3 y D por 2 y sumemos:

$$\begin{array}{r} -6D + 3F = -12 \\ 6D + 10F = -66 \\ \hline 13F = -78 \end{array}$$

www.elsolucionario.org

Resolvamos esta última ecuación para *F:*

$$13F = -78$$

$$F = -\frac{78}{13}$$

$$F = -6$$

Sustituyamos el valor de *F* en una ecuación con dos variables y resolvámosla. Por ejemplo en *B*:

$$3D + F = -9$$

$$3D + (-6) = -9$$

$$3D - 6 = -9$$

$$3D = -9 + 6$$

$$3D = -3$$

$$D = -\frac{3}{3}$$

$$D = -1$$

Ahora, con los valores de *D* y *F* podemos obtener el valor de *E* sustituyéndolos en la ecuación *A*.

$$-2D + E + F = -5$$

$$-2(-1) + E + (-6) = -5$$

$$2 + E - 6 = -5$$

$$E - 4 = -5$$

$$E = -5 + 4$$

$$E = -1$$

Conociendo los tres valores, podemos obtener la ecuación particular de la circunferencia que cumple las tres condiciones dadas.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + (-1)x + (-1)y + (-6) = 0$$

$$x^2 + y^2 - x - y - 6 = 0 \quad \ldots\ldots \text{ Ecuación general}$$

www.elsolucionario.org

Ejercicio 2

1. Obtén las coordenadas y la longitud del radio de cada una de las siguientes circunferencias representadas por su ecuación.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 8x - 8y - 7 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 4 = 0$

e) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 12 = 0$

f) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 20y - 30 = 0$

2. Obtén la ecuación de cada una de las circunferencias que pasan por los puntos dados.

a) (3, 2), (0, 4) y (–6, 0)

b) (3, 0), (–2, 4) y (0, –1)

c) (3, 5), (–2, 1) y (–6, 0)

d) (–3, 2), (0, –4) y (1, –2)

e) (1, 2), (–2, 4) y (5, –3)

f) (–5, 4), (–1, –1) y (6, 2)

3. Un sistema de riego por aspersión lanza agua en forma circular. El jardinero a cargo de un terreno cuadrado de 160 m de lado debe colocar el aspersor en un punto tal que alcance simultáneamente tres posiciones dentro del terreno localizados en (10, 30) (50, 40) y (30, 90) con respecto a una misma esquina del terreno. Obtén una ecuación que represente al conjunto de puntos a los que puede llegar el agua. ¿Cuál es la superficie de riego directo?

4. Obtén la ecuación que representa la forma de un arco semicircular si su base mide 9 m. Considera el origen del sistema de referencia un extremo de la base del arco.

5. Reunidos en equipos de cinco personas discutan entre ustedes cómo pueden obtener la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en la intersección de dos rectas y que pase por un punto determinado.

Comprueben los pasos acordados en el siguiente ejemplo.

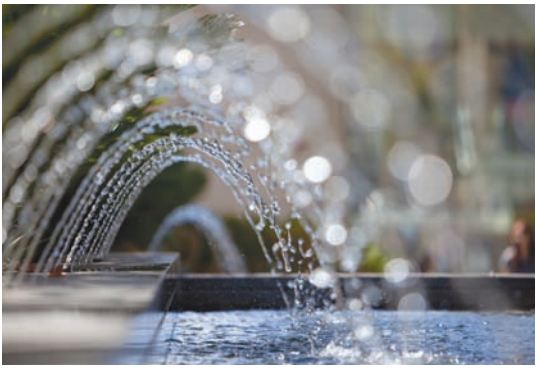
Obtengan la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en la intersección de las rectas $x - 2y - 1 = 0$ y $3x + 2y - 13 = 0$, y que pasa por el punto $(-1, -6)$.

www.elsolucionario.org

3.2 PARÁBOLA

A continuación, estudiaremos a la parábola, una de las secciones cónicas que se aplican por ejemplo en algunos tipos de lentes y espejos, en puentes, trayectorias de proyectiles y balones. Podemos formar una parábola con una linterna sosteniéndola de tal manera que el límite superior del haz luminoso sea paralelo al piso.

Observa las siguientes fotografías y luego contesta las preguntas.



a) ¿Qué forma tienen los chorros de agua? _____

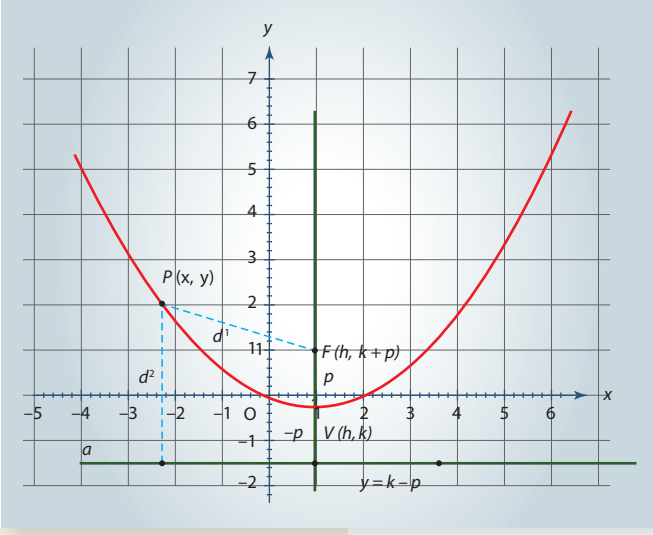
b) Dibuja dos situaciones que ejemplifiquen trayectorias parabólicas.

c) ¿Qué tipo de ecuación representa una parábola? _____

Una **parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia no dirigida a un punto fijo llamado **foco** es igual a la distancia no dirigida a una recta fija llamada **directriz**.

Partiendo de esta definición, podemos obtener la ecuación que representa a una parábola, para ello tendremos en cuenta dos tipos de parábolas: las verticales y las horizontales, empecemos con las parábolas verticales.

www.elsolucionario.org



De la figura de la izquierda establecemos los siguientes puntos y líneas:

$V(h, k)$ . . . . . Vértice de la parábola

$F(h, k + p)$ . . . . . Foco de la parábola

$P(x, y)$ . . . . . Punto de la parábola

p . . . . . Distancia entre el vértice y el foco

$y = k - p$. . . . . Ecuación de la directriz

Las distancias de las que hablamos en la definición de la parábola son una distancia entre dos puntos y la otra de un punto a una recta.

Para $P(x, y)$ y $F(h, k + p)$

$$d_1 = \sqrt{(x - h)^2 + [y - (k + p)]^2}$$

Para $P(x, y)$ y $y = k - p$

$$d_2 = \frac{(0)(x) + (1)(y) - (k - p)}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$d_2 = \frac{y - k + p}{\sqrt{1}}$$

$$= y - k + p$$

Igualando ambas distancias, como indica la definición de parábola:

$$d_1 = d_2$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + [(y - k) - p]^2} = y - k + p$$

$$(x - h)^2 + [(y - k) - p]^2 = [(y - k) + p]^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 - 2p(y - k) + p^2 = (y - k)^2 + 2p(y - k) + p^2$$

$$(x - h)^2 - 2py + 2kp = 2py - 2kp$$

$$(x - h)^2 = 2py + 2py - 2kp - 2kp$$

$$(x - h)^2 = 4py - 4kp$$

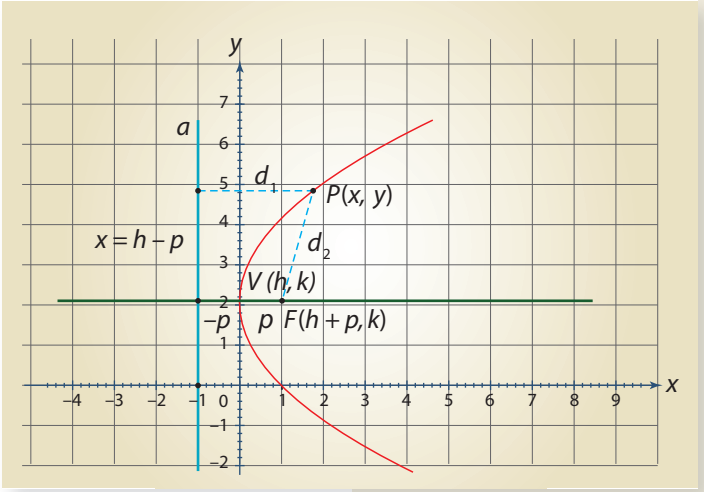
$$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k) \quad \ldots\ldots\ldots$$ Ecuación ordinaria de la parábola vertical

Si $4p > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba.

Si $4p < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo.

www.elsolucionario.org

Para obtener la ecuación de una parábola horizontal seguimos un proceso similar:



Para $P(x, y)$ y $F(h + p, k)$

$$d_1 = \sqrt{[x - (h + p)]^2 + (y - k)^2}$$

Para $P(x, y)$ y $x = h - p$

$$d_2 = \frac{(1)(x) + (0)(y) - (h - p)}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{x - h + p}{\sqrt{1}}$$

$$= x - h + p$$

Igualando ambas distancias, como indica la definición de parábola:

$$d_1 = d_2$$

$$\sqrt{[(x - h) - p]^2 + (y - k)^2} = x - h + p$$

$$[(x - h) - p]^2 + (y - k)^2 = [(x - h) + p]^2$$

$$(x - h)^2 - 2p(x - h)^2 + p^2 + (y - k)^2 = (x - h)^2 + 2p(x - h) + p^2$$

$$(y - k)^2 - 2px + 2hp = 2px - 2hp$$

$$(y - k)^2 = 2px + 2px - 2hp - 2hp$$

$$(y - k)^2 = 4px - 4hp$$

$$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h) \quad \ldots\ldots\ldots$$ Ecuación ordinaria de la parábola horizontal

Si $4p > 0$ la parábola es cóncava hacia la derecha.

Si $4p < 0$ la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Cuando el vértice de la parábola está en el origen del plano cartesiano: $V(h, k) = (0, 0)$

www.elsolucionario.org

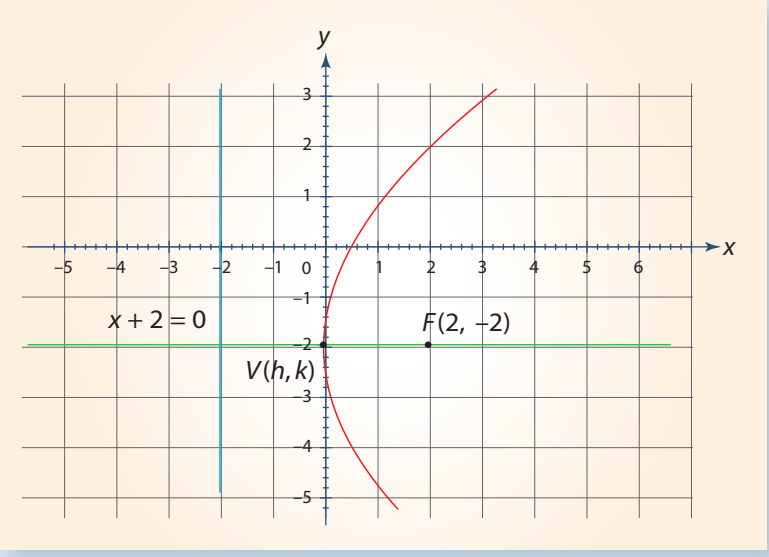
Ejemplo 8

Obtén la ecuación de la parábola con foco en el punto $F(2, -2)$ y directriz la recta $x = -2$.

Solución

Tracemos las condiciones dadas para esbozar la parábola que las cumple.

Por la posición del foco y la directriz, sabemos que la parábola es horizontal y que el vértice de la misma está en el punto medio de la distancia que separa al foco de la misma directriz.



Obtengamos el valor de p y las coordenadas del vértice partiendo del foco.

Para $P(2, -2)$ con $x + 2 = 0$.

$$2p = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$2p = \frac{(1)(2) + (0)(-2) + (2)}{\pm\sqrt{(1)^2 + (0)^2}}$$

$$= \frac{2 - 0 + 2}{\sqrt{1}}$$

$$= 4$$

Partiendo de que $p = 2$ y de que $F(2, -2)$.
Y de que el $V(h, k)$ y $F(h + p, k)$

$$F(h + p, k) = F(2, -2)$$

$$h + 2 = 2 \qquad k = -2$$

$$h = 2 - 2$$

$$h = 0$$

Siendo las coordenadas del vértice:

$$V(h, k) = (0, -2)$$

$$p = 2$$

www.elsolucionario.org

Con las coordenadas del vértice y el valor de p podemos obtener la ecuación de una parábola horizontal.

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$$
$$(y+2)^2 = (4)(2)x$$
$$(y+2)^2 = 8x$$
$$y^2 + 4y + 4 = 8x$$
$$y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$$

Ejemplo 9

Obtén la ecuación de la parábola para la cual su vértice es el punto $V(-2, 4)$ y su foco es el punto $(-2, 7)$.

Solución

En este caso, conocemos las coordenadas del vértice y el foco, y por su alineación (ambos puntos comparten la coordenada x). Sabemos que pertenecen a una parábola vertical.

La distancia entre el vértice y el foco es el parámetro p, el cual podemos calcularlo mediante la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$p = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (7-4)^2}$$
$$= \sqrt{(-2+2)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{0^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{9}$$
$$= 3$$

Ahora, sustituyamos las coordenadas del vértice y el valor de p en la ecuación de la parábola vertical para obtener la ecuación de la misma.

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$$

Para $V(-2, 4)$ y $p = 3$.

$$(x-(-2))^2 = 4(3)(y-4)$$
$$(x+2)^2 = 12(y-4) \text{ . . . . . Ecuación ordinaria}$$

Continúa...

www.elsolucionario.org

$$x^2 + 4x + 4 = 12y - 48$$

$$x^2 + 4x - 12y + 4 + 48 = 0$$

$$x^2 + 4x - 12y + 52 = 0 \quad \text{Ecuación general}$$

Ejemplo 10

Obtén la ecuación general de la parábola con vértice en el origen del plano cartesiano, que abre a la izquierda y que pasa por el punto (–2, 4).

Solución

Como el vértice está en el origen del plano, sus coordenadas son $V(0, 0)$, podemos calcular el valor del parámetro p por sustitución en la ecuación ordinaria de una parábola horizontal.

$$(y - k)^2 = -4p(x - h)$$

$$(4 - 0)^2 = -4p(-2 - 0)$$

$$4^2 = 4p(2)$$

$$16 = 8p$$

$$\frac{16}{8} = p$$

$$2 = p$$

Conociendo el valor de p y sabiendo que abre a la izquierda, podemos obtener ahora la ecuación de la parábola horizontal.

$$(y - 0)^2 = -4(2)(x - 0)$$

$$y^2 = -8x \quad \text{Ecuación ordinaria}$$

$$y^2 + 8x = 0 \quad \text{Ecuación general}$$

Ejercicio 3

1. Obtén la ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas y traza una representación gráfica de ellas.

a) Foco en el punto (3, 0) y directriz $y - 7 = 0$.

b) Vértice en (5, 0) y foco en (5, 3).

c) Directriz $x + 4 = 0$ y vértice en (0, 0).

www.elsolucionario.org

d) Vértice en el origen del plano, directriz vertical, lado recto de longitud 12 y abre hacia la izquierda.

e) Foco en (–3, 4) y directriz $y - 2 = 0$.

f) Vértice en (–1, –4) y foco en (–1, 0).

g) Vértice en (–5, 2) directriz horizontal, lado recto de longitud 8 y abre hacia arriba.

h) Directriz $y - 6 = 0$ y vértice en (5, 2).

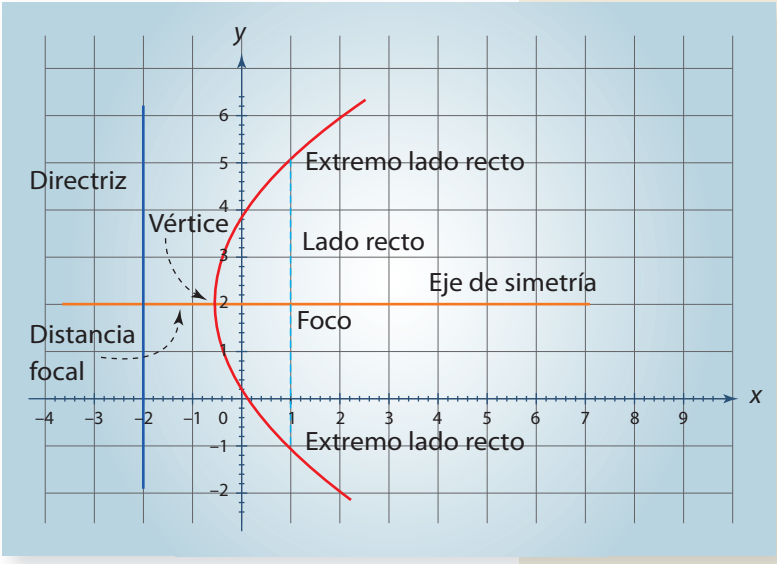
2. A la altura de donde está su receptor una antena parabólica tendría 1.4 m de ancho. ¿A qué distancia del fondo de la antena está colocado el receptor?

3. La trayectoria parabólica de un objeto lanzado horizontalmente desde una altura *h* con una velocidad inicial de *v* m/s, se calcula con la $x = \sqrt{-\frac{2v^2}{g}y}$ donde *x* es la distancia recorrida, *y* la altura desde la que se lanza y $g = 9.8$ m/s^2. Para desalojar el agua de una azotea plana de un edificio de 4 m de altura durante una fuerte lluvia se coloca un tubo por el cual el agua cae a una velocidad de 4.5 m/s. ¿A qué distancia del muro caerá el agua al llegar al piso?

Obtención de los elementos de una parábola

Hasta este momento hemos hablado de algunos elementos de la parábola, como su vértice, el foco, la distancia focal y la directriz, los cuales pueden ser obtenidos desde su ecuación, al igual que en la circunferencia calculamos el centro y el radio desde su ecuación.

Veamos cuáles son los elementos de la parábola. En su gráfica sus relaciones métricas desde una tabla resumen se dividen de acuerdo con la orientación de la gráfica.



www.elsolucionario.org

La relación y posición de estos elementos se estudian en la siguiente tabla resumen.

PARÁBOLA		
Orientación	**Ecuaciones**	**Elementos**
Vertical	Con vértice en el origen: $x^2 = \pm 4py$ Vértice fuera del origen: $(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$	Vértice: $V(h, k)$ Distancia entre vértice y foco: p. Lado recto: $4p$. Foco: $(h, k \pm p)$ Extremos del lado recto: $(h \pm 2p, k \pm p)$ Directriz: $y = k \pm p$. Concavidad: Si $4p > 0$, entonces, abre hacia arriba. Si $4p < 0$, entonces, abre hacia abajo.

PARÁBOLA		
Orientación	**Ecuaciones**	**Elementos**
Horizontal	Con vértice en el origen: $y^2 = \pm 4px$ Vértice fuera del origen: $(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$	Vértice: $V(h, k)$ Distancia entre vértice y foco: p. Lado recto: $4p$. Foco: $(h \pm p, k)$ Extremos del lado recto: $(h \pm p, k \pm 2p)$ Directriz: $x = h \pm p$ Concavidad: Si $4p > 0$, entonces, abre hacia la derecha. Si $4p < 0$, entonces, abre hacia la izquierda.

Veamos ahora como obtener los elementos de una parábola a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 11

Obtén las coordenadas del vértice y del foco de la parábola cuya ecuación es $x^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Solución

Factoricemos la ecuación general de la parábola para expresarla en su forma ordinaria.

$$x^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

$$x^2 - 6x = -4y + 3 \quad \text{. . . . . Agrupando términos semejantes.}$$

www.elsolucionario.org

$$x^2 - 6x + 9 = -4y + 3 + 9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Completando TCP}$$

$$(x - 3)^2 = -4y + 12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Factorizando}$$

$$(x - 3)^2 = -4(y - 3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Factorizando}$$

De la forma ordinaria obtenemos las coordenadas del vértice y la longitud del lado recto.

$$V(h, k) = (3, 3) \qquad 4p = 4$$

$$p = 1$$

Con esta información podemos calcular las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz. Por la forma y el signo en la ecuación ordinaria sabemos que la parábola es vertical y abre hacia abajo, por lo que el foco y la directriz son:

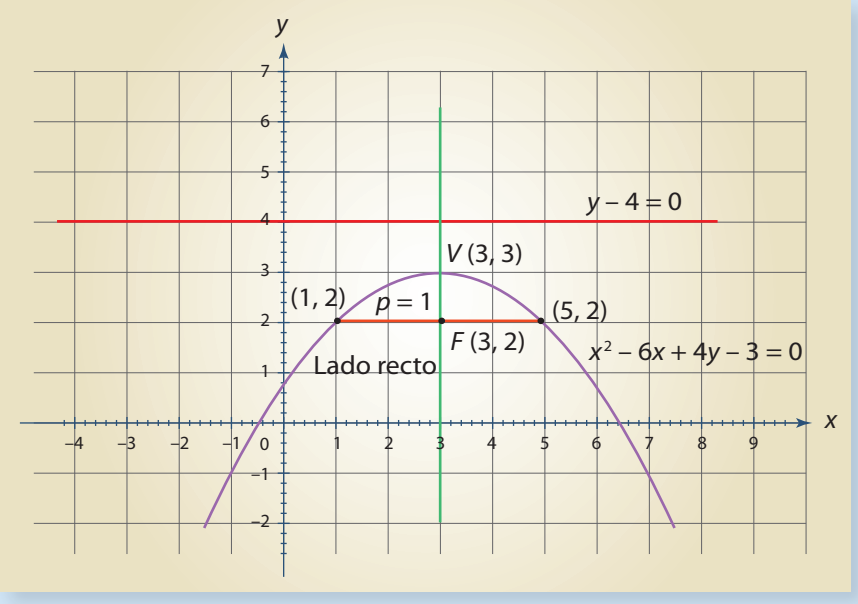
$$F(h, k - p) = (3, 3 - 1) \qquad y = k + p$$

$$= (3, 2) \qquad = 3 + 1$$

$$= 4$$

$$y - 4 = 0$$

Tracemos la gráfica de la parábola dada:



www.elsolucionario.org

Ejemplo 12

Calcula las coordenadas de los extremos del lado recto y las coordenadas del vértice de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 6x + 6y - 9 = 0$.

Solución

Factoricemos la ecuación general de la parábola para expresarla en su forma ordinaria.

$$y^2 - 6x + 6y - 9 = 0$$
$$y^2 + 6y = 6x + 9 \quad \text{Agrupando términos semejantes}$$
$$y^2 + 6y + 9 = 6x + 9 + 9 \quad \text{Completando TCP}$$
$$(y+3)^2 = 6x + 18 \quad \text{Factorizando}$$
$$(y+3)^2 = 6(x+3) \quad \text{Factorizando}$$

De la forma ordinaria obtenemos las coordenadas del vértice y la longitud del lado recto.

$$V(h, K) = (-3, -3) \qquad 4p = 6$$
$$p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Con esta información podemos calcular las coordenadas del foco y las coordenadas de los extremos del lado recto. Por la forma y el signo en la ecuación ordinaria, sabemos que la parábola es horizontal y abre hacia la derecha, por lo que el foco y los extremos del lado recto son:

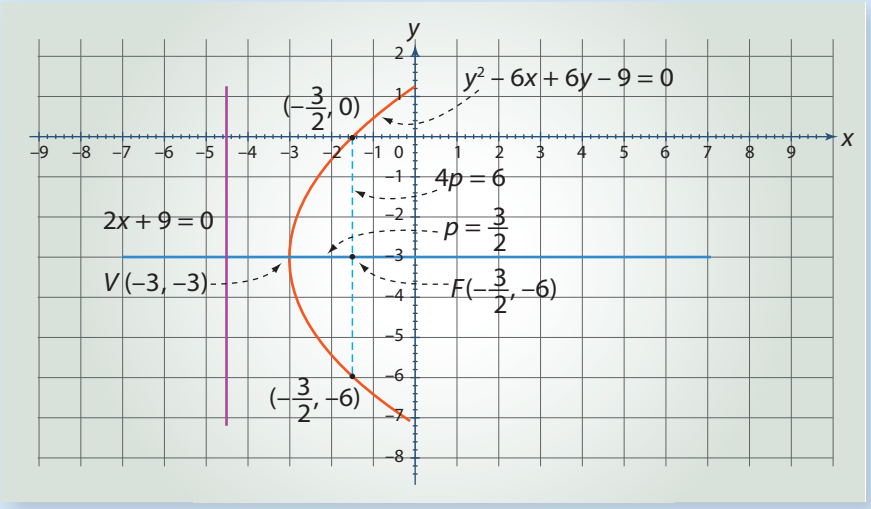
$$F(h+p, k) = \left(-3 + \frac{3}{2}, -3\right) = \left(-\frac{3}{2}, -3\right)$$

Extremos del lado recto: $(h+p, k \pm 2p) = \left(-3 + \frac{3}{2}, -3 \pm 3\right) = \left(-\frac{3}{2}, -3 \pm 3\right)$

Siendo los extremos del lado recto:

$$\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \qquad \left(-\frac{3}{2}, -6\right)$$

Tracemos la gráfica de la parábola dada.



www.elsolucionario.org

Ejemplo 13

Obtén los elementos de la parábola cuya ecuación es $x^2 + 8y - 16 = 0$.

Solución

Factoricemos la ecuación general de la parábola para expresarla en su forma ordinaria.

$$x^2 + 8y - 16 = 0$$
$$x^2 = -8y + 16 \quad \text{Agrupando términos semejantes}$$
$$x^2 = -8(y - 2) \quad \text{Factorizando}$$
$$(x + 0)^2 = -8(y - 2) \quad \text{Factorizando}$$

De la forma ordinaria obtenemos las coordenadas del vértice y la longitud del lado recto.

$$V(h, k) = (0, 2) \qquad 4p = 8$$
$$p = \frac{8}{4} = 2$$

Con esta información podemos calcular las coordenadas del foco y las coordenadas de los extremos del lado recto. Por la forma y el signo en la ecuación ordinaria. Sabemos que la parábola es vertical y abre hacia abajo, por lo que el foco y los extremos del lado recto son:

$$F(h, k - p) = (0, 2 - 2) = (0, 0)$$

Extremos del lado recto:

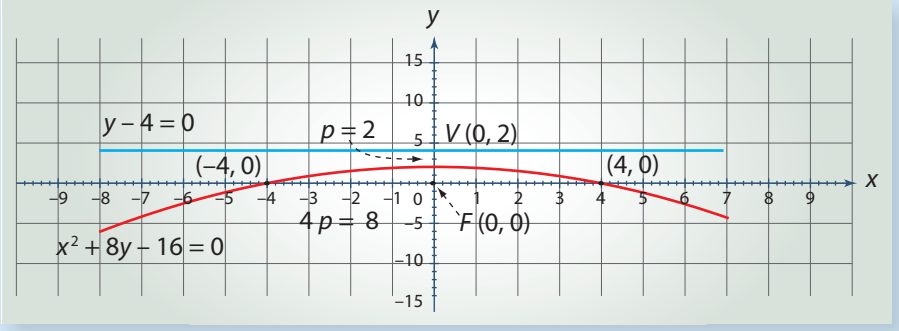
$$(h \pm 2p, k - p) = (0 \pm 2(2), 2 - 2) = (0 \pm 4, 2 - 2) = (\pm 4, 0)$$

Siendo los extremos del lado recto: (–4, 0) y (4, 0).

La ecuación de la directriz:

$$y = k + p$$
$$y = 2 + 2$$
$$y = 4$$
$$y - 4 = 0$$

Tracemos la gráfica de la parábola dada.



www.elsolucionario.org

Ejercicio 4

1. Encuentra los elementos y la gráfica de cada una de las siguientes parábolas representadas por su ecuación general.

a) $x^2 - 4y + 4 = 0$

b) $x^2 - 4y + 5 = 0$

c) $2y^2 - 8x + 5 = 0$

d) $x^2 + 6x - 4y - 2 = 0$

e) $y^2 + 2x - 10y + 27 = 0$

f) $x^2 - 10x + 6y = 0$

g) $9y^2 + 48x - 80 = 0$

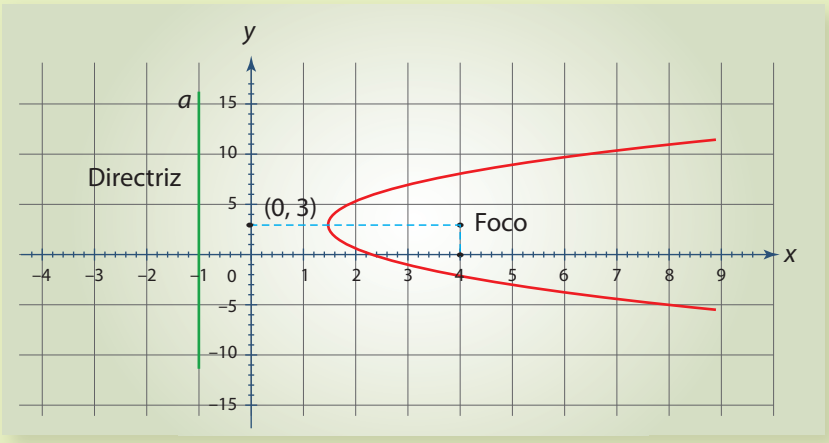
h) $3x^2 - 12x + y - 4 = 0$

i) $2x^2 + 10x + 7y + 28 = 0$

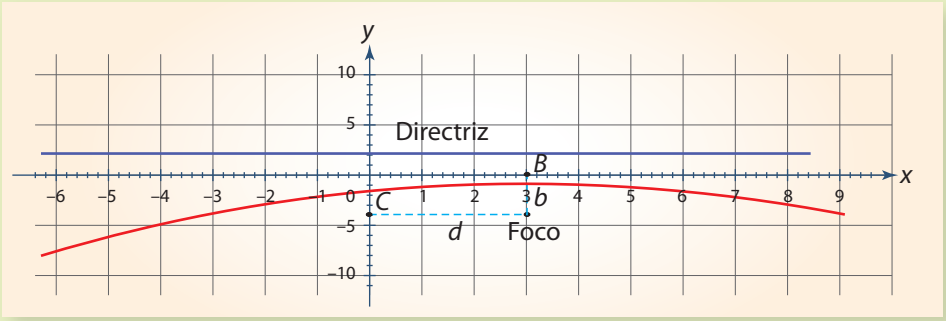
j) $y^2 - 6x + 14y + 9 = 0$

2. Obtén la ecuación de cada una de las siguientes parábolas representadas por su gráfica.

a)

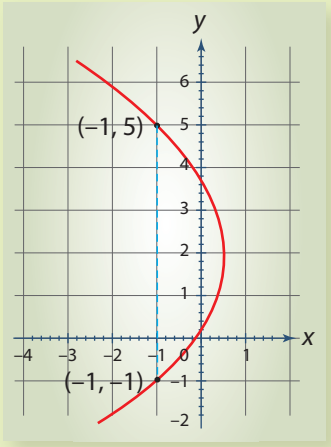


b)

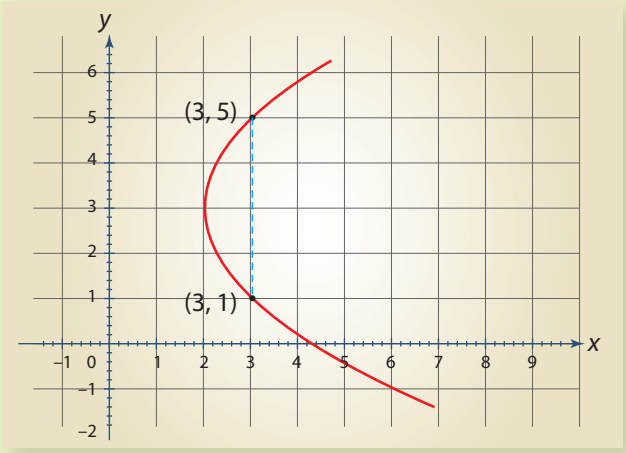


www.elsolucionario.org

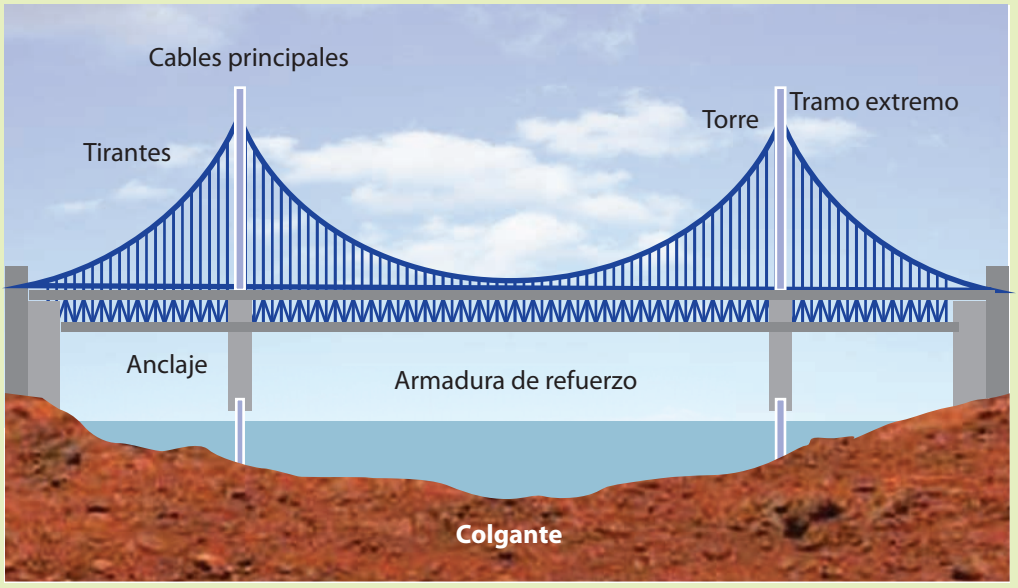
c) Extremos del lado recto (–1, 5) y (–1, –1).



d) Extremos del lado recto (3, 5) y (3, 1).



3. Un cable sostenido por dos postes tiene forma de un arco parabólico, los postes que lo sostienen están separados 40 m y tienen una altura de 10 m. Si el cable toca el piso a la mitad de la distancia entre los postes, calcula la altura del cable a 8 m del centro del arco.



Formen equipos de cinco integrantes, discutan y resuelvan el siguiente problema.

Continúa...

www.elsolucionario.org

(Continuación)

4. Alejandra vende 80 audífonos diariamente. Si cuando los vende a $30 se los compran todos y por cada aumento de $0.60 en el precio deja de vender un audífono. Determinen:

   a) Para esta situación, en qué les puede ser útil lo estudiado.

   b) El precio de cada audífono para que Alejandra obtenga la ganancia máxima al día.

   c) ¿Cuál es el ingreso máximo por su venta de audífonos?

   d) ¿Cuántos audífonos deja de vender cuando su ingreso es máximo?

3.3 ELIPSE

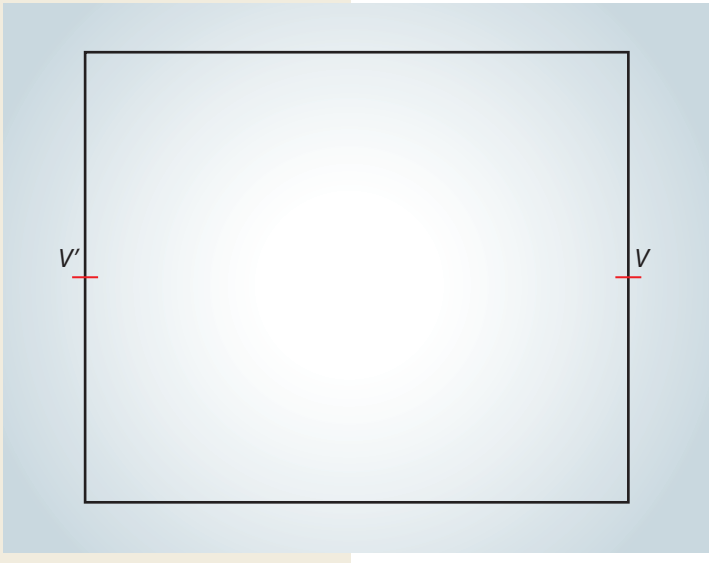
La tercera de las secciones cónicas es la **elipse**, ésta se define como *el lugar geométrico de los puntos del plano en los que la suma de las distancias dirigidas a dos puntos fijos es constante.*

Antes de iniciar su estudio veamos una forma geométrica de trazar esta curva.

Para obtener el trazo de una **elipse** sigue el procedimiento que se explica a continuación.

a) Divide el rectángulo dado en dos partes iguales y une los puntos *V'* y *V*.

b) Divide los tres lados consecutivos del rectángulo por arriba de la línea *V'V* en cuatro partes iguales cada uno, y márcalos con las letras *F*, *G*, *H*, *I*. Sigue el mismo orden.



c) Desde cada uno de los puntos *V'* y *V* traza segmentos a ambos lados del rectángulo superior.

d) Marca las intersecciones de las líneas con las mismas letras.

e) Une los puntos de manera consecutiva y formen la parte superior de la **elipse**.

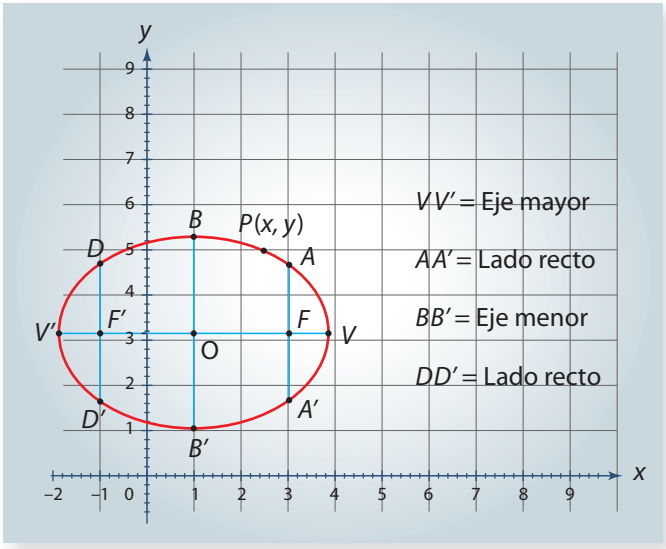
f) Repite este mismo procedimiento con el rectángulo inferior para obtener la otra parte de la **elipse**.

La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos de un plano en el que la suma de sus distancias dirigidas a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

www.elsolucionario.org

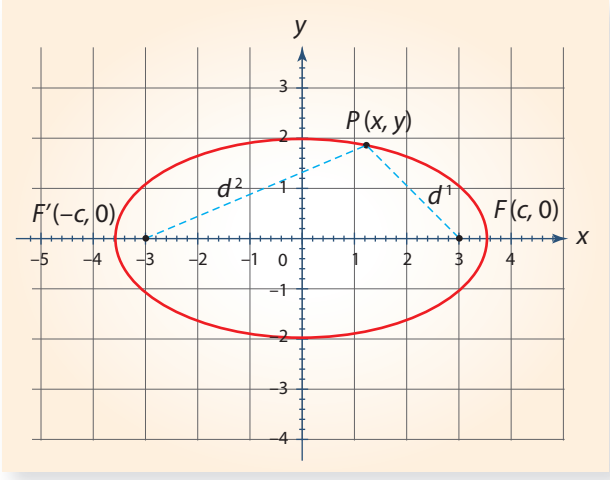
El punto medio del segmento que une los focos es el **centro** de la elipse. El segmento que une los puntos de intersección de la **elipse** con la recta que une los focos es el **eje mayor** y esos puntos de intersección son los **vértices**. El segmento perpendicular al eje mayor que pasa por el centro y acotado por la elipse es el **eje menor**. El segmento perpendicular al eje mayor que pasa por los focos, acotado por la elipse, es el **lado recto**.

Veamos estos elementos en la gráfica de una elipse.



Si a es la distancia entre el centro y un vértice, entonces, $2a$ es la longitud del eje mayor. Si b es la distancia entre el centro y la intersección de la perpendicular con el eje mayor y la elipse, la longitud del eje menor es $2b$. Si c es la distancia entre el centro de la elipse y uno de los focos, la distancia focal es $2c$.

Obtengamos ahora la ecuación de la elipse horizontal, para ello consideremos el caso en el que el centro de la elipse está en el origen del plano cartesiano.



www.elsolucionario.org

Siendo las coordenadas de los puntos fijos $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$ y la distancia entre los vértices $2a$ por definición tenemos:

$$F'P + FP = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right] = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$-4(a^2 - cx) = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(a^2 - cx)^2 = \left[a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = \left[a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$$

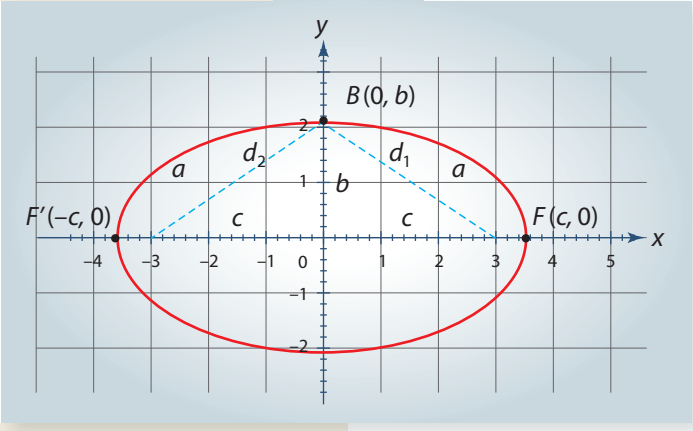
$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$



En el punto $B(0, b)$, con las distancias del centro a los vértices y al foco de la elipse, aplicamos el teorema de Pitágoras, podemos obtener una relación numérica entre los valores a, b y c, ya que formamos un triángulo rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

www.elsolucionario.org

Sustituyendo el valor de $a^2 - c^2$ por b^2:

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$
$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

Dividiendo entre a^2b^2:

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2}$$
$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Siendo la ecuación ordinaria de la elipse horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el centro está fuera del origen del plano:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Obtén las ecuaciones de la elipse vertical.

De manera similar, obtenemos la ecuación de la elipse vertical, obteniendo como ecuaciones.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ Con centro en el origen}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ Con centro fuera del origen}$$

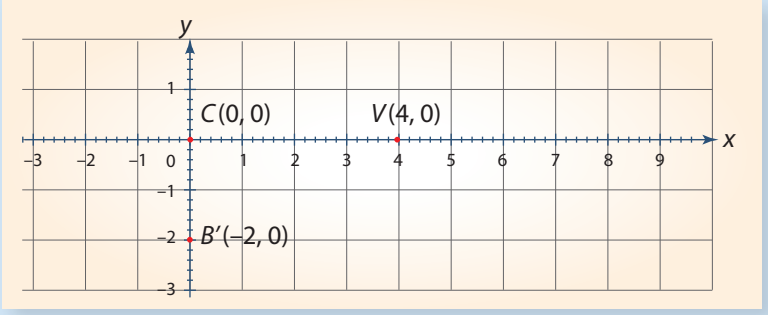
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 14

Obtén la ecuación de la elipse con un vértice en (4, 0), un extremo del eje menor en (0, –2) y centro en el origen.

Solución

Tracemos las condiciones iniciales del problema.



Continúa...

www.elsolucionario.org

Por la posición de los puntos dados, obtenemos:

$$a = 4 \quad \text{y} \quad b = 2$$

Como el centro y el vértice están alineados horizontalmente, sabemos que la elipse es horizontal, siendo su ecuación:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ecuación ordinaria}$$

$$16\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}\right) = 16(1)$$

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

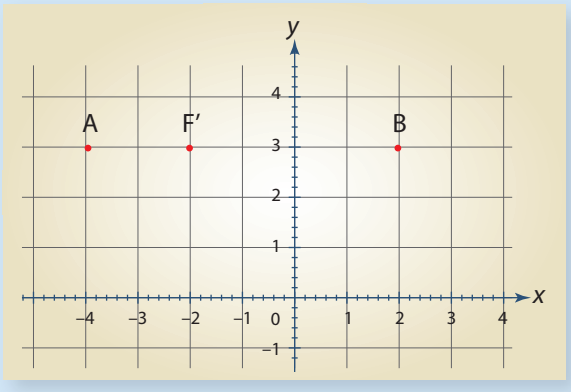
$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ecuación general}$$

Ejemplo 15

Encuentra la ecuación de la elipse con vértices en (–4, 3) y (2, 3) y que tiene un foco en (–2, 3).

Solución

Grafiquemos las condiciones iniciales.



Para poder obtener la ecuación de la elipse debemos tener en cuenta que al estar alineados los vértices y el foco horizontalmente, la elipse está orientada también en forma horizontal y que su centro es el punto medio del segmento que une los vértices

$$C(h, k) = Pm_{V'V}$$

$$= \left(\frac{-4 + 2}{2}, \frac{3 + 3}{2}\right)$$

$$= (-1, 3)$$

También, necesitamos conocer la longitud del semieje mayor y del semieje menor, las cuales las podemos calcular por medio de la distancia entre dos puntos.

www.elsolucionario.org

Semieje mayor

$$a = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-3)^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (0)^2}$$
$$= \sqrt{9}$$
$$= 3$$

Distancia entre centro y foco

$$c = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (3-3)^2}$$
$$= \sqrt{(1)^2 + (0)^2}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1$$

Para obtener la longitud del semieje menor, hacemos uso del teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$3^2 = b^2 + 1^2$$
$$9 - 1 = b^2$$
$$8 = b^2$$

Con esta información ya podemos escribir la ecuación de la elipse.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-(-1))^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{8} = 1$$
$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{8} = 1 \quad \text{. . . . . Ecuación ordinaria}$$
$$72\left[\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{8}\right] = 72(1)$$
$$8(x+1)^2 + 9(y-3)^2 = 72$$
$$8x^2 + 16x + 8 + 9y^2 - 54y + 81 - 72 = 0$$
$$8x^2 + 9y^2 + 16x - 54y + 17 = 0 \quad \text{. . . . . Ecuación general}$$

Ejemplo 16

Obtén la ecuación de la elipse con focos en (–4, –3) y (–4, 1), un extremo del eje menor en (–6, –1).

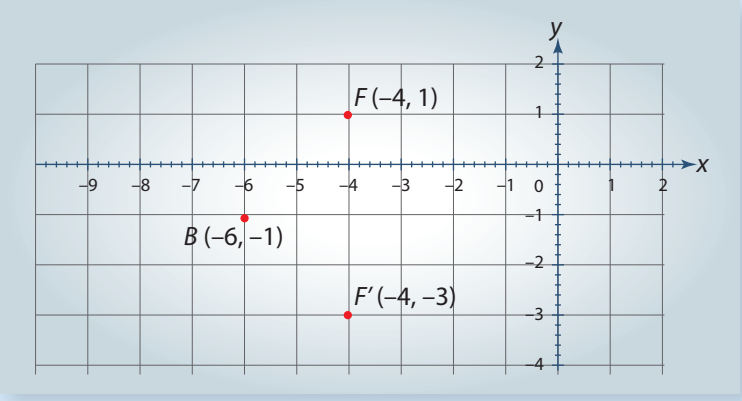
Continúa...

www.elsolucionario.org

Solución

Grafiquemos las condiciones iniciales del ejercicio para analizar los datos que tenemos:

Por la alineación vertical de los focos, sabemos que la elipse es vertical. También que el punto medio del segmento que une los focos es el centro de la elipse.



Coordenadas del centro

$$C(h,\ k) = Pm_{F'F}$$

$$= \left(\frac{-4+(-4)}{2},\ \frac{1+(-3)}{2}\right)$$

$$= (-4\ -1)$$

Distancia entre centro y foco

$$c = \sqrt{\left[-4-(-4)\right]^2 + \left(-1-1\right)^2}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

La longitud del semieje menor la podemos calcular con la distancia del centro al extremo conocido del eje menor.

$$b = \sqrt{\left(-4-(-6)\right)^2 + \left(-1-(-1)\right)^2}$$

$$= \sqrt{4+0}$$

$$= 2$$

Con la información de los valores de b y c podemos calcular la longitud del semieje mayor:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$= 2^2 + 2^2$$

$$= 4 + 4$$

$$= 8$$

$$a = \sqrt{8}$$

Escribamos ahora la ecuación de la elipse vertical solicitada.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{\left(x-(-4)\right)^2}{2^2} + \frac{\left(y-(-1)\right)^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2} = 1$$

www.elsolucionario.org

$$\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{8}=1 \quad \text{. . . . . Ecuación ordinaria}$$

$$8\left[\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{8}\right]=8(1)$$

$$2(x+4)^2+(y+1)^2=8$$

$$2x^2+16x+32+y^2+2y+1-8=0$$

$$2x^2+y^2+16x+2y+25=0 \text{. . . . . Ecuación general}$$

Elementos de la elipse

A continuación te presentamos un resumen de las ecuaciones de la elipse y de las relaciones que hay entre sus elementos.

Orientación	Ecuación	Elementos
Horizontal	Centro en el origen: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$C(0,0)$ $F(\pm c,0)$, $V(\pm a,0)$, $B(0,\pm b)$ $LR=\frac{2b^2}{a}$ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ $a^2=b^2+c^2$ Extremos del lado recto $\left(\pm c,\pm\frac{b^2}{a}\right)$
	Centro fuera del origen: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$C(h,k)$ $F(h\pm c,k)$, $V(h\pm a,k)$, $B(h,k\pm b)$ $LR=\frac{2b^2}{a}$ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ $a^2=b^2+c^2$ Extremos del lado recto $\left(h\pm c,k\pm\frac{b^2}{a}\right)$
Vertical	Centro en el origen: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$C(0,0)$ $F(0,\pm c)$, $V(0,\pm a)$, $B(\pm b,0)$ $LR=\frac{2b^2}{a}$ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ $a^2=b^2+c^2$ Extremos del lado recto $\left(\pm\frac{b^2}{a},\pm c\right)$
	Centro fuera del origen: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$C(h,k)$, $F(h,k\pm c)$, $V(h,k\pm a)$, $B(h\pm b,k)$ $LR=\frac{2b^2}{a}$ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ $a^2=b^2+c^2$ Extremos del lado recto $\left(h\pm\frac{b^2}{a},k\pm c\right)$

www.elsolucionario.org

Ejercicio 5

1. Halla la ecuación de la elipse con focos en $F'(2, -3)$ y $F(2, 3)$ y excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.
2. Encuentra la ecuación de la elipse con vértices $V'(0, -6)$ y $V(0, 6)$, y longitud de lado recto igual a $\frac{25}{3}$.
3. Determina la ecuación de la elipse con eje menor que une los puntos $B'(0, -3)$ y $B(0, 3)$ y uno de sus focos en $F(4, 0)$.
4. Obtén la ecuación de la elipse con centro en $C(2, 3)$, vértice en $V'(2, -2)$ y uno de sus focos en $F(2, 6)$.
5. Halla la ecuación de la elipse con foco en $F(4, 2)$, vértice en $V'(-4, 2)$ y longitud del eje mayor de 10 unidades.
6. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje mayor coincidente con el eje y de 8 unidades de longitud y lado recto igual a $\frac{9}{2}$.
7. Encuentra la ecuación de la elipse con extremos del eje menor en $B'(3, 4)$ y $B(9, 4)$ y foco en $F(6, 9)$.
8. Obtén la ecuación de la elipse horizontal con centro en $C(-2, -1)$, longitud de lado recto de 8 y eje mayor de 10.
9. Encuentra la ecuación de la elipse vertical con centro en el origen, longitud del eje mayor de 26 y longitud del lado recto de $\frac{288}{13}$.
10. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, con vértice en $V'(-10, 0)$ y excentricidad $\frac{4}{5}$.

Veamos ahora por medio de los siguientes ejemplos como obtener los distintos elementos de una elipse, partiendo de su ecuación.

Ejemplo 17

Obtén las coordenadas de los vértices y la longitud del lado recto de la elipse cuya ecuación es:

$$2x^2 + y^2 - 12x + 4y - 5 = 0$$

Solución

Para obtener los elementos de la elipse dada, expresemos la ecuación general de la elipse en forma ordinaria.

$$2x^2 + y^2 - 12x + 4y - 5 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$(2x^2 - 12x) + (y^2 + 4y) = 5 \quad \text{Agrupando términos por variable}$$
$$2(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = 5 \quad \text{Factorizando}$$
$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 5 + 18 + 4 \quad \text{Completando TCP}$$
$$2(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 27 \quad \text{Factorizando y simplificando}$$

www.elsolucionario.org

$$\frac{2(x-3)^2}{27}+\frac{(y+2)^2}{27}=\frac{27}{27} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Igualando a la unidad}$$

$$\frac{(x-3)^2}{\frac{27}{2}}+\frac{(y+2)^2}{27}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Simplificando}$$

De la ecuación ordinaria de la elipse obtenemos las coordenadas del centro y la longitud de los semiejes mayor y menor.

$C(h, k) = (3, -2)$

$$b^2=\frac{27}{2} \qquad a^2=27$$

$$b=\sqrt{\frac{27}{2}} \qquad a=\sqrt{27}$$

$$=\sqrt{\frac{27}{2}\cdot\frac{2}{2}} \qquad =\sqrt{9\cdot 3}$$

$$=\sqrt{\frac{9\cdot 6}{4}} \qquad =3\sqrt{3}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{6}$$

La longitud del lado recto la podemos calcular mediante la relación:

$$\text{Lado recto}=\frac{2b^2}{a}$$

$$=\frac{2\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)^2}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\left(\frac{27}{2}\right)}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{27}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Continúa...

www.elsolucionario.org

$$= \frac{9\sqrt{3}}{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

Investiga y propón para su solución dos situaciones diferentes a las expuestas hasta ahora, las cuales puedas representar por medio de ecuaciones lineales.

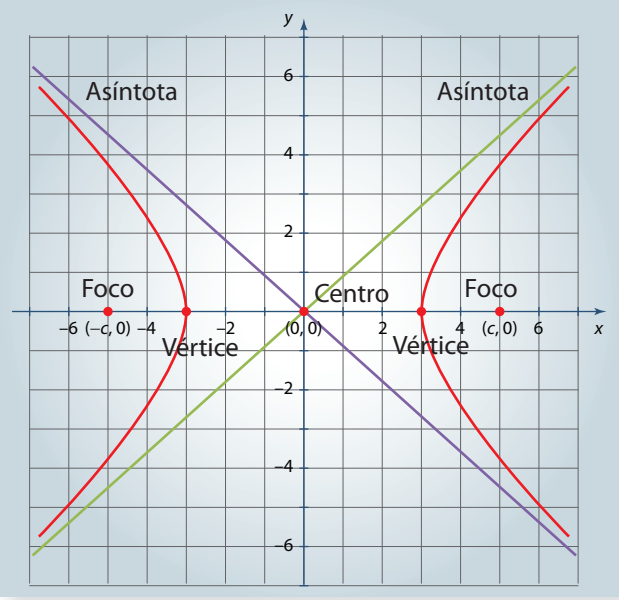
www.elsolucionario.org

3.4 HIPÉRBOLA

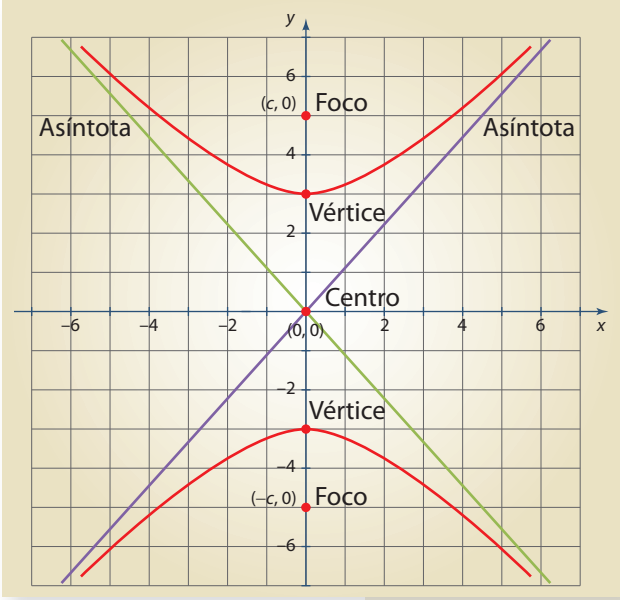
Tema desarrollado por Rubén B. Sánchez Hernández

La cuarta de las secciones cónicas es la **hipérbola** y se define como el lugar geométrico de los puntos del plano en los que la diferencia de las distancias dirigidas a dos puntos fijos es constante.

Hipérbola horizontal



Hipérbola vertical



A continuación veremos la manera geométrica de trazar esta curva. Primero citaremos los elementos que la componen.

a) Tiene un centro de coordenadas (*h*, *k*).

b) Su gráfica consta de dos ramas que se prolongan infinitamente en sentidos opuestos. Su rango es el conjunto de todos los números reales, pero existe un intervalo en el que no existe la gráfica y está delimitada por los vértices.

c) Tiene dos vértices, cuya distancia entre ambos es conocida como eje transverso o eje real: $2a$.

d) Cuenta con dos focos y su distancia entre ambos es conocida como eje focal: $2c$.

e) Su eje conjugado es igual a $2b$.

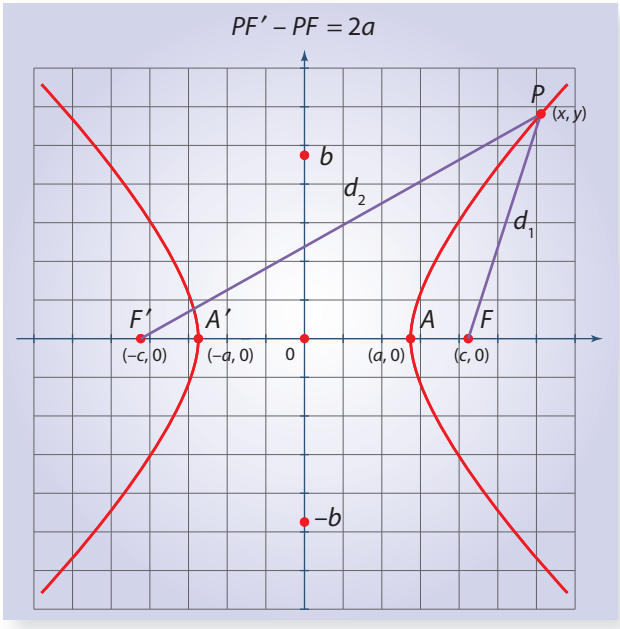
f) La longitud de sus ramas se le conoce como lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}$

g) Su excentricidad es mayor que uno.

h) Las dos rectas asíntotas son líneas rectas que se aproximan continuamente a la curva de la hipérbola, es decir, que su distancia entre las dos tiende a cero.

www.elsolucionario.org

Ahora obtengamos la ecuación de la hipérbola horizontal, para ello consideremos el caso en el que el centro está en el origen del plano cartesiano.



Sí la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano en los que la diferencia de las distancias dirigidas a dos puntos fijos es constante, entonces:

$$F'P - FP = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left[x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right]$$

$$c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2$$

www.elsolucionario.org

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}} - \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola cuyo centro está en el origen.

Por otro lado, para una hipérbola con centro fuera del origen se tiene la siguiente ecuación.

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola cuyo centro está fuera del origen.

Para el lado recto de las curvas en la hipérbola se utiliza la expresión:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

La relación entre las cantidades de a, b y c representan los siguientes valores.

- a ⟶ Representa la distancia del centro de la hipérbola a uno de los vértices
- b ⟶ Representa la distancia del centro a un extremo cualquiera del eje conjugado
- c ⟶ Representa la distancia del centro a uno de los focos

Ecuación general de la hipérbola

Toda ecuación de una hipérbola puede expresarse de la siguiente manera.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde: A y C tienen signos diferentes y son también diferentes de cero.

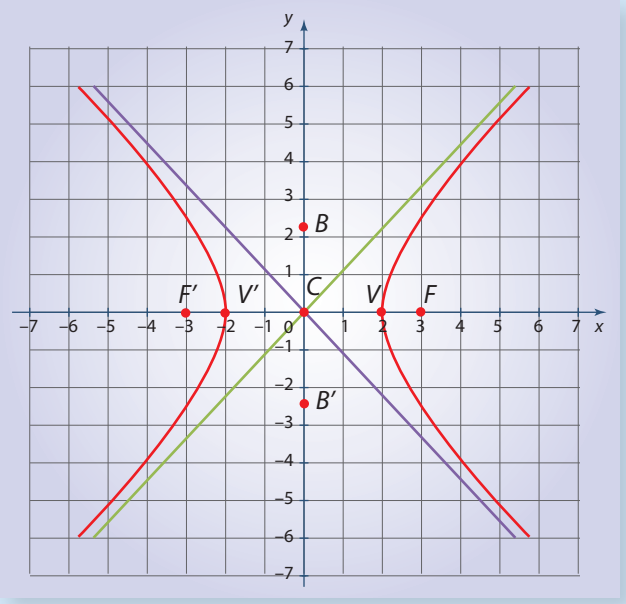
Si la ecuación de una hipérbola está expresada de manera general, se puede obtener su fórmula reducida utilizando el método de completar dos trinomios cuadrados perfectos, como hicimos en la unidad anterior con la elipse.

www.elsolucionario.org

Ejemplo 18

Determina la ecuación y gráfica completa de la hipérbola cuyo eje transverso es igual a 4, sus focos están ubicados en $FF'(\pm 3, 0)$ y su centro está en el origen.

Solución



$2a = 4 \qquad a = 2 \qquad a^2 = 4$

$2c = 6 \qquad c = 3 \qquad c^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 5$

Sustituyendo:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y-0)^2}{5} = 1$$

$$\frac{5x^2 - 4y^2}{20} = 1$$

$5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$ . . . . Ecuación general de la hipérbola

El lado recto se obtiene sustituyendo:

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = 5$$

Las asíntotas son:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x \qquad y = \frac{-\sqrt{5}}{2}x$$

$$2y = \sqrt{5}x \qquad 2y = -\sqrt{5}x$$

$$\sqrt{5}x - 2y = 0 \qquad \sqrt{5}x + 2y = 0$$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

Ejemplo 19

Dada la ecuación de la hipérbola $25y^2 - 144x^2 = 3\,600$, determina:

a) Las coordenadas de los focos.

b) Las coordenadas de los dos vértices.

c) La longitud de cada lado.

d) La longitud del eje transverso.

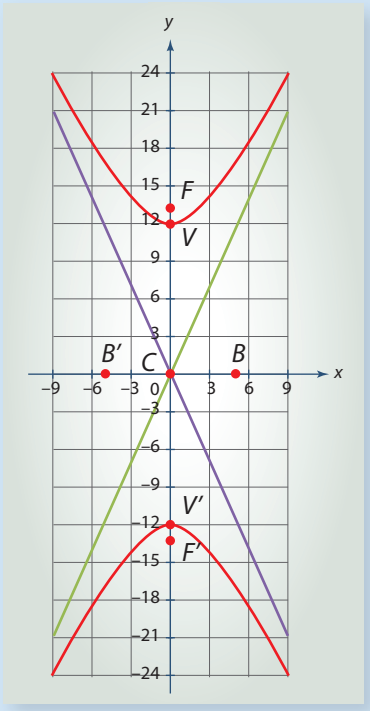
www.elsolucionario.org

e) La longitud del eje conjugado.

f) La excentricidad.

g) Las ecuaciones de las asíntotas

Su gráfica es vertical:



Solución

a) De la ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Luego:

$$\frac{25\,y^2}{3600} - \frac{144\,x^2}{3600} = \frac{3600}{3600}$$

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$

Donde: $a = 12$ y $b = 5$; de ahí:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 144 + 25$

$c = 13$

Entonces, las coordenadas de los focos son de la forma $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$; por tanto, en este caso son los puntos $F(0, 13)$ y $F'(0, -13)$.

b) Las coordenadas de los vértices.

Los vertices son de la forma $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$, donde $a = 12$.

Entonces, las coordenadas de los vértices son $V(0, 12)$ y $V'(0, -12)$.

c) La longitud de cada lado recto es:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{2(25)}{12}$$

$$LR = \frac{25}{6}$$

d) La longitud del eje transverso es:

$VV' = 2a$

$VV' = 2(12) = 24$ El eje es de 24.

Continúa...

www.elsolucionario.org

e) La longitud del eje conjugado es:

$BB' = 2a$

$BB' = 2(5) = 10$

f) La excentricidad se determina así:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{13}{12}$$

g) De acuerdo con la expresión de la hipérbola, las ecuaciones de las asíntotas son de la forma:

$$y = \pm\frac{ax}{b}$$

Luego:

$$y = \frac{12x}{5}$$

donde: $5y = 12x$

$12x - 5y = 0$

$$y = -\frac{12x}{5}$$

donde: $5y = -12x$

$12x + 5y = 0$

Ejemplo 20

Ahora, veamos el caso contrario. A partir de la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 559 = 0$, determina:

a) Las coordenadas del centro.
b) Las de los focos.
c) Las de los vértices.
d) La longitud de cada lado recto.
e) La del eje conjugado.
f) La del eje transverso.
g) Las ecuaciones de las asíntotas.
h) La excentricidad.

Solución

a) Aplica el método de completar trinomios cuadrados perfectos en la forma que ya conoces y halla las coordenadas del centro.

$$9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 559 = 0$$

$$(9x^2 - 54x) - (16y^2 - 64y) = 559$$

$$9(x^2 - 6x) - 16(y^2 - 4y) = 559$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 16(y^2 - 4y + 4) = 559 + 81 - 64$$

$$9(x - 3)^2 - 16(y - 2)^2 + 576 = 0$$

www.elsolucionario.org

Al dividir ambos miembros de la ecuación anterior entre 576 resulta:

$$\frac{9(x-3)^2}{576} - \frac{16(y-2)^2}{576} = \frac{576}{576} = 1$$

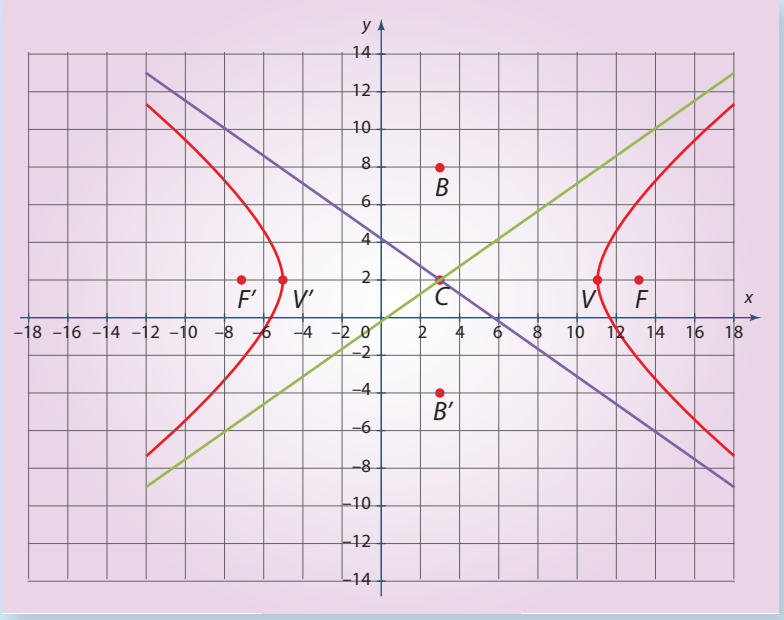
De donde:

$$\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

Ecuación en forma reducida u ordinaria.

Las coordenadas del centro de la hipérbola son $c(3, 2)$.

Su gráfica es:



b) Las coordenadas de los focos. De acuerdo con la ecuación que obtuvimos, $a^2 = 64$ y $b^2 = 36$, de donde:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 100$

$c = 10$

El eje focal es paralelo al eje x, por tanto, las coordenadas de los focos son de la forma $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$. Luego:

$F(3 + 10, 2)$ y $F'(3 - 10, 2)$

$F(13, 2)$ y $F'(-7, 2)$

Las coordenadas de los focos son $F(13, 2)$ y $F'(-7, 2)$.

c) Las coordenadas de los vértices. Por ser el eje focal paralelo al eje x, las expresiones de las coordenadas de los vértices son de la forma $V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$ así:

$V(3 + 8, 2)$ y $V'(3 - 8, 2)$

$V(11, 2)$ y $V'(-5, 2)$

Las coordenadas de los vértices son $V(11, 2)$ y $V'(-5, 2)$.

d) La longitud de cada lado recto mide:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{2(36)}{8} = \frac{72}{8}$$

$LR = 9$

Continúa...

www.elsolucionario.org

e) La longitud del eje conjugado:

$2a = 2(8)$

$2a = 16$

f) La longitud del eje transverso:

$2b = 2(6)$

$2b = 12$

g) Las ecuaciones de las asíntotas. Como el eje focal es paralelo al eje, las ecuaciones de las asíntotas son de la forma:

$$y - h = \pm\frac{b(x - h)}{a}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y - 2 = -\frac{6}{8}(x - 3) \qquad y - 2 = \frac{6}{8}(x - 3)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 3) \qquad y - 2 = \frac{3}{4}(x - 3)$$

$3x + 4y - 17 = 0$ $\qquad$ $3x - 4y - 1 = 0$

h) La excentricidad.

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Ejemplo 21

De la ecuación de la hipérbola determina sus elementos y su gráfica.

$$9x^2 - 16y^2 - 54x + 32y + 209 = 0$$

Solución

$9x^2 - 54x \_\_\_\_ - 16y^2 + 32y \_\_\_\_ = -209$

$9(x^2 - 6x + 9) - 16(y^2 - 2y + 1) = -209 + 81 - 16$

$9(x - 3)^2 - 16(y - 1)^2 = -144$

$$\frac{(x - 3)^2}{16} - \frac{(y - 1)^2}{9} = -1$$

$C(3, 1)$

$2a = 6,\ a = 3,\ a^2 = 9$

$2b = 8,\ b = 4,\ b^2 = 16$

$2c = 10,\ c = 5,\ c^2 = 25$

$$e = \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

www.elsolucionario.org

$$LR = \frac{2a^2}{b} = 10.6$$

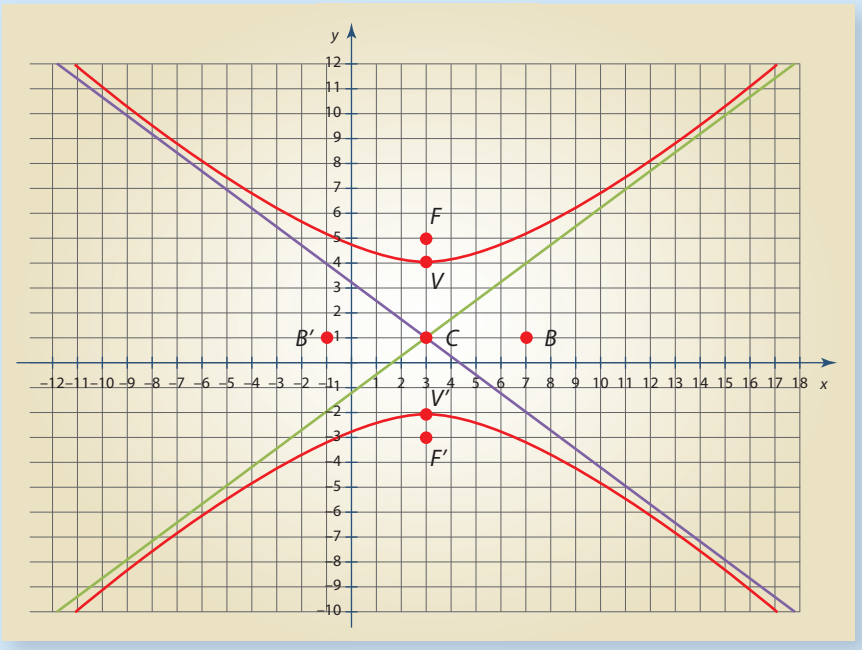
$$(y - k) = \pm\frac{a}{b}(x - h)$$

$$(y - 1) = \frac{3}{4}(x - 3)$$

$4y - 4 = 3x - 9$ $\qquad$ $4y - 4 = -3x + 9$

$3x - 4y - 5 = 0$ $\qquad$ $3x + 4y - 13 = 0$

Su gráfica es:



Elementos de la hipérbola

A continuación te presentamos un resumen de las ecuaciones de la hipérbola y sus elementos.

Orientación	Ecuación	Elementos
Horizontal	Centro en el origen: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ecuaciones de las asíntotas en el origen. $y = \pm\frac{b}{a}x$ $c^2 = a^2 + b^2$ $\quad e = \frac{c}{a}$ $\quad e > 1$ ← Excentricidad Lado recto → $LR = \frac{2b^2}{a}$
	Centro fuera del origen: $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	Ecuaciones de las asíntotas fuera del origen. $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$ $c^2 = a^2 + b^2$ $\quad e = \frac{c}{a}$ $\quad e > 1$ ← Excentricidad Lado recto → $LR = \frac{2b^2}{a}$

www.elsolucionario.org

Orientación	Ecuación	Elementos
Vertical	Centro en el origen: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	Ecuaciones de las asíntotas en el origen. $y = \pm\frac{a}{b}x$ $c^2 = a^2 + b^2$ $e = \frac{c}{a}$ $e > 1$ ← Excentricidad Lado recto → $LR = \frac{2b^2}{a}$
	Centro fuera del origen: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	Ecuaciones de las asíntotas fuera del origen. $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$ $c^2 = a^2 + b^2$ $e = \frac{c}{a}$ $e > 1$ ← Excentricidad Lado recto → $LR = \frac{2b^2}{a}$

Ejercicio 6

1. Obtén los elementos de las hipérbolas y grafícalas.

a) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$

b) $9y^2 - 16x^2 = 1296$

c) $8x^2 - 6y^2 - 16x - 16 = 0$

d) $y^2 - 4y - 2x^2 - 4x = 0$

2. Resuelve los problemas

a) El eje conjugado de una hipérbola mide 8 y coincide con el eje y y las ecuaciones de las asíntotas son $y = +\frac{2}{3}x$ y $y = -\frac{2}{3}x$

Obtén la ecuación de la hipérbola, sus ejes, focos y vértices.

b) Determina la ecuación de la hipérbola y su gráfica si tiene su centro en el origen, su eje conjugado coincide con el eje x con longitud igual a 6 y la distancia entre sus focos es 8.

c) Halla la ecuación de la hipérbola y traza su gráfica, si su eje transverso es 24, su eje focal es 26 y sus focos están ubicados en el eje y y su centro está en el origen.

d) Determina la ecuación de la hipérbola cuyos focos están ubicados en las coordenadas $F(3, 6)$ y $F'(3, -4)$, el eje transverso es 8 y su centro es $C(3, 1)$. Traza además su gráfica, excentricidad, lado recto y escribe las ecuaciones de las asíntotas.

e) Determina la ecuación de la hipérbola cuya longitud del eje conjugado es 12, su centro está ubicado en $(-2, 3)$ y las coordenadas de los vértices son $V(6, 3)$ y $V'(-10, 3)$.

f) A partir de la ecuación de la hipérbola $9y^2 - 16x^2 - 54y - 64x - 127 = 0$, determina sus elementos y traza su gráfica.

www.elsolucionario.org

LECTURA SUGERIDA

El mundo de las cónicas

Realiza la lectura El mundo de las cónicas en Internet.

http://www.canaldeciencias.com/2014/08/30/el-mundo-de-las-conicas/

Otra forma de comprobar la belleza de las cónicas:

MSc. Liyuan Suárez

Actividades a realizar

1. Lean de manera individual la lectura propuesta e indiquen cuáles de las aplicaciones mencionadas de las cónicas conocían y cuáles les resultaron más interesantes.

2. Contesten las siguientes preguntas:

a) Indica cómo se obtiene cada una de las cónicas (la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola) al cortar una superficie cónica con un plano.

b) ¿Qué matemático griego hizo por primera vez una descripción detallada de las cónicas?

c) Menciona algunos ejemplos de cónicas que se presentan en la naturaleza.

d) ¿Qué forma tiene la trayectoria de un proyectil lanzado desde la superficie o la de un chorro de agua que sale de un surtidor?

e) ¿A qué se le denomina parábola de seguridad?

f) ¿Qué ventajas tiene un telescopio de espejo líquido?

g) ¿Por qué en los faros de los coches se coloca la fuente de luz en el foco de la parábola?

h) ¿Qué forma tienen las órbitas de los planetas que giran alrededor del Sol?

i) ¿Qué excentricidad tiene la órbita de la Tierra, la de Plutón y la del cometa Halley? ¿Cuál de ellas se acerca más a una circunferencia?

j) ¿Qué propiedad tiene la Galería de los Suspiros en el famoso Taj Mahal, de la India?

k) ¿Cómo se usan las propiedades reflexivas de las cónicas en el tratamiento de los cálculos renales?

l) ¿En qué consiste el problema clásico de la duplicación del cubo o problema de Delfos?

m) ¿Cómo abordó Menecmo el problema de la duplicación del cubo?

3. Investiguen cómo se llamaba la obra que escribió Apolonio de Pérgamo sobre las cónicas, de cuántos tomos constaba, cómo se llamaba y de qué trataba cada uno. ¿No te sorprende que esto se haya escrito hace más de dos mil años?

4. Reúnanse en equipos y comenten sobre las diversas aplicaciones de las cónicas en el mundo actual y por qué es tan importante estudiarla.

5. Exponga cada equipo a sus demás compañeros lo que concluyeron en el punto anterior.

www.elsolucionario.org

Cierre

Recuperación de información

Escribe en el paréntesis el inciso correspondiente.

1. ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$? .( )

a) $C(5, -3), r = 5$ *b)* $C(-5, 3), r = 5$ *c)* $C(5, -3), r = 3$ *d)* $C(-5, 3), r = 3$

2. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 4. . . . . .( )

a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ *b)* $x^2 + y^2 - 16 = 0$ *c)* $x^2 + y^2 + 4 = 0$ *d)* $x^2 + y^2 + 16 = 0$

3. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y con directriz $x = 2$. . . . .( )

a) $y^2 - 8 = 0$ *b)* $y^2 + 8 = 0$ *c)* $y^2 + 8x = 0$ *d)* $y^2 - 8x = 0$

4. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco $F(0, -1)$. . . . . .( )

a) $x^2 + 2y = 0$ *b)* $x^2 - 4y = 0$ *c)* $x^2 - 2y = 0$ *d)* $x^2 + 4y = 0$

5. ¿Cuál es el foco de la parábola $x^2 - 4x - 4y + 20 = 0$? . . . . . .( )

a) $F(5, 2)$ *b)* $F(2, 5)$ *c)* $F(-2, 5)$ *d)* $F(2, -5)$

6. Ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen, un foco en $F(4, 0)$ y un vértice en $V(5, 0)$. . . . . .( )

a) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ *b)* $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$

c) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ *d)* $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$

7. Ecuación de la elipse vertical con centro en el origen, un vértice en $V(0, 4)$ y longitud del lado recto igual a 2. . . . . .( )

a) $4x^2 + y^2 + 16 = 0$ *b)* $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

c) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$ *d)* $x^2 + 4y^2 + 16 = 0$

8. Centro de la elipse $25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 236 = 0$. . . . . .( )

a) $C(2, 2)$ *b)* $C(-2, -2)$ *c)* $C(-5, 4)$ *d)* $C(5, 4)$

9. Ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen, un vértice en $V(4, 0)$ y un foco en $F(5, 0)$. . . . . .( )

a) $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ *b)* $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

c) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ *d)* $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

10. Ecuación de la hipérbola vertical con centro en el origen, un vértice en $V(0, 4)$ y longitud del lado recto igual a 2. . . . . .( )

a) $16x^2 - 4y^2 - 64 = 0$ *b)* $4x^2 - 16y^2 + 64 = 0$

c) $16x^2 - 4y^2 + 64 = 0$ *d)* $4x^2 - 16y^2 - 64 = 0$

11. Centro de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 - 32x - 18y + 151 = 0$. . . . . .( )

a) $C(1, -1)$ *b)* $C(-1, -1)$ *c)* $C(1, 1)$ *d)* $C(-1, 1)$

www.elsolucionario.org

Autoevaluación

Una forma en la que podemos evaluar nuestro desempeño al realizar una actividad, es revisar las acciones y actitudes que tenemos hacia la tarea que tenemos que desarrollar.

El siguiente cuestionario, tiene la finalidad de proporcionarte una guía para que revises críticamente tu participación en la actividad académica desarrollada y dado el caso, puedas hacer las correcciones necesarias.

Revisa tu desempeño en el aula y el trabajo en equipo con respecto a cada una de las acciones que se te proponen colocando una *X* en la columna que mejor describa tu participación de acuerdo al criterio indicado en el cuadro.

Aspecto a evaluar		Acciones	Criterios			
			Nunca	Casi nunca	La mayoría de las veces	Siempre
Forma de trabajo	Disciplina	Puse atención al profesor, seguí sus indicaciones y actué con respeto hacia él y mis compañeros.				
	Presentación	Elaboré mis trabajos con letra legible o usando herramientas computacionales (procesador de textos, hoja de cálculo, programa de presentaciones, etcétera).				
	Redacción	Redacté mis trabajos de forma que se entendieran sin problema mis argumentos y procedimientos y sin faltas de ortografía.				
	Orden	Presenté mis trabajos de manera ordenada sin saltarme pasos en las fechas indicadas.				
Trabajo en clase	Lectura de unidad	Leí la lectura de unidad y realicé las actividades indicadas en ella.				
	Participación en clase	Participé activamente en las clases y pregunté a mi profesor mis dudas.				
	Trabajo en equipo	Colaboré en las actividades que se realizaron por equipo.				
Trabajo fuera del aula	Estudio previo	Leí las secciones correspondientes del libro antes de la presentación de un tema nuevo por parte del maestro.				
	Tareas asignadas	Resolví los ejercicios propuestos y realicé las tareas y actividades extraclase asignadas por el profesor.				
	Investigación	Realicé las investigaciones indicadas en el libro y por el profesor.				

www.elsolucionario.org

Autoevaluación disciplinar

Elemento		Dominio	No dominio	Intenciones
Circunferencia				
	Defino analíticamente la circunferencia.			
	Defino los elementos de la circunferencia.			
	Obtengo la ecuación ordinaria y general de la circunferencia dados su centro y su radio.			
	Obtengo la ecuación ordinaria y general de la circunferencia dados su centro y un punto por el que pasa.			
	Obtengo la ecuación ordinaria y general de la circunferencia dados los puntos extremos de uno de sus diámetros.			
	Obtengo la ecuación ordinaria y general de la circunferencia dados su centro y la ecuación de una recta tangente a ella.			
	Obtengo los elementos de la circunferencia partiendo de su ecuación general.			
	Obtengo la ecuación ordinaria y general de la circunferencia dados tres puntos de ella.			
Parábola				
	Defino analíticamente la parábola.			
	Defino los elementos de la parábola.			
	Obtengo la ecuación ordinaria y general de la parábola, ya sea vertical u horizontal, dados sus elementos.			
	Identifico si una parábola es horizontal o vertical y hacia dónde abre dada su ecuación general.			
	Obtengo los elementos de la parábola partiendo de su ecuación general.			
	Obtengo la gráfica de la parábola dada su ecuación ordinaria o general.			

www.elsolucionario.org

Elemento		Dominio	No dominio	Intenciones
Elipse				
	Defino analíticamente la elipse.			
	Defino los elementos de la elipse.			
	Obtengo la ecuación ordinaria y general de la elipse, ya sea vertical u horizontal, dados sus elementos.			
	Identifico si una elipse es horizontal o vertical dada su ecuación ordinaria.			
	Obtengo los elementos de la elipse partiendo de su ecuación general.			
	Obtengo la gráfica de la elipse dada su ecuación ordinaria y general.			
Hipérbola				
	Defino analíticamente la hipérbola.			
	Defino los elementos de la hipérbola.			
	Obtengo la ecuación ordinaria y general de la hipérbola, ya sea vertical u horizontal, dados sus elementos.			
	Identifico si una hipérbola es horizontal o vertical dada su ecuación ordinaria.			
	Obtengo los elementos de la hipérbola partiendo de su ecuación general.			
	Obtengo la gráfica de la hipérbola dada su ecuación ordinaria o general.			
	Obtengo las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola dada su ecuación ordinaria o sus elementos.			
Cónicas				
	Dada la ecuación general de una cónica identifico si se trata de una circunferencia, una parábola, una elipse o una hipérbola.			

www.elsolucionario.org

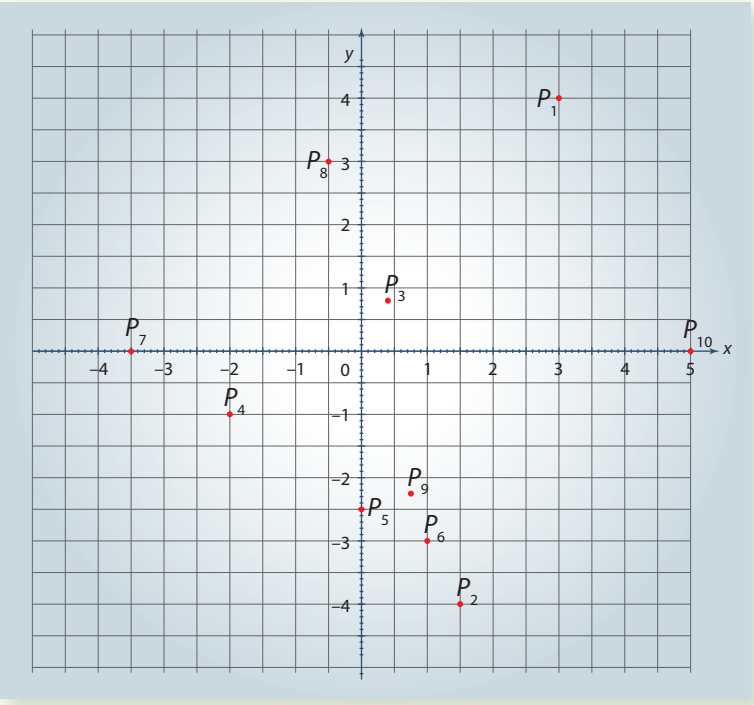
S

SOLUCIÓN A EJERCICIOS SELECCIONADOS

www.elsolucionario.org

Ejercicio 1

1.



2. *a)* $P_1(1, 3)$, $P_2(2, 6)$, $P_3(4, 12)$

b) $P_1(1, 2)$, $P_2(2, 4)$, $P_3(4, 8)$

c) $P_1(1, -0.6)$, $P_2(2, -1.2)$, $P_3(4, -2.4)$

d) $P_1(2, 0.5)$, $P_2(0.5, 2)$, $P_3(4, 0.25)$

e) $P_1(2, 2)$, $P_2(-1, -1)$, $P_3(5, 5)$

3.

Punto	Cuadrante	Punto	Cuadrante
(–4, 3)	Segundo	(4, –2)	Cuarto
(3, 3)	Primero	(0, –4)	En el eje *y*
(2, –5)	Cuarto	(–2, 4)	Segundo
(–1, –1)	Tercero	$\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right)$	Primero
(5, 0)	En el eje *x*	(1, 0)	En el eje *x*

4. $A(0, 3)$

$B(3, 5)$

$C(6, 0)$

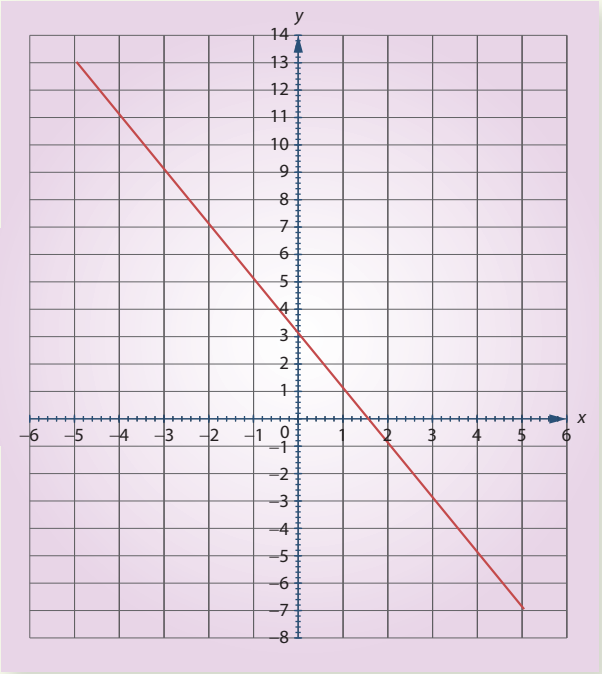
$D(2, 1)$

$E(-1, -2)$

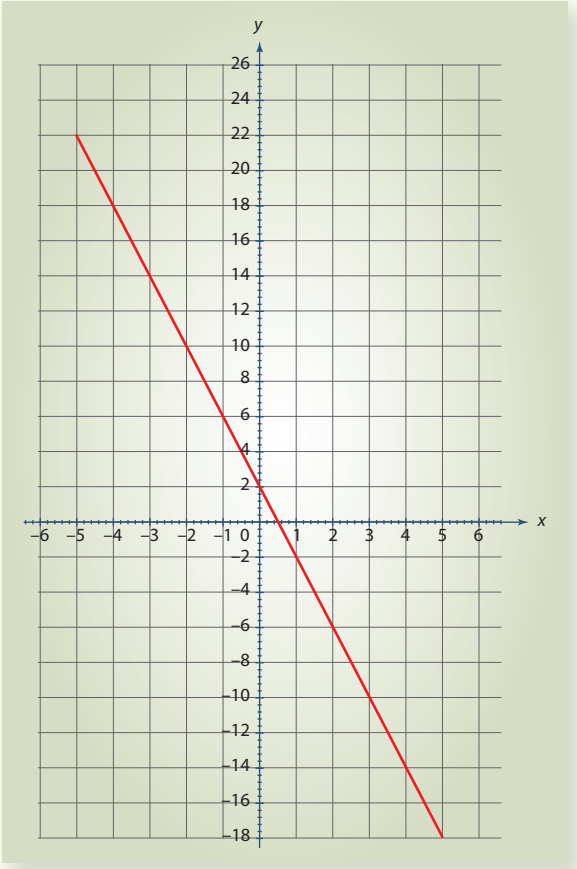
$F(-3, 6)$

5. *a*)

x	$y = 3 - 2x$	(x, y)
–1	$y = 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5$	(–1, 5)
0	$y = 3 - 2(0) = 3 - 0 = 3$	(0, 3)
1	$y = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1$	(1, 1)
2	$y = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$	(2, –1)



b)

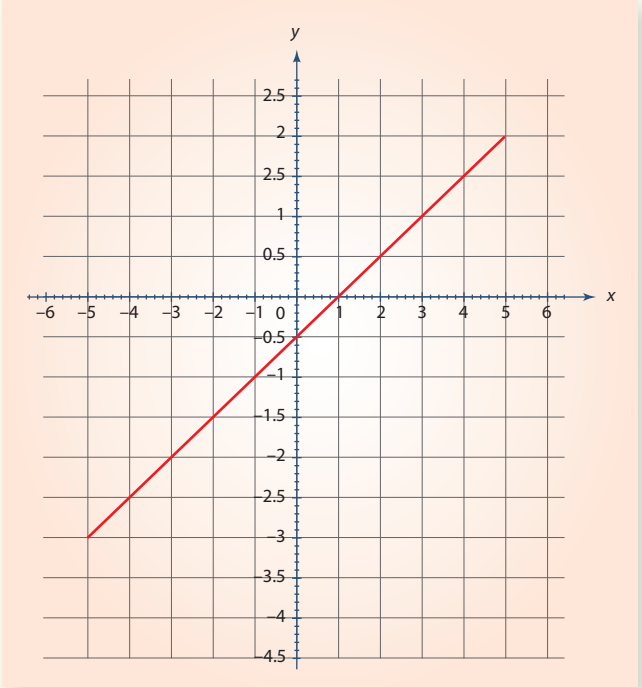


x	$y = -4x + 2$	(x, y)
–1	$y = -4(-1) + 2 = 4 + 2 = 6$	(–1, 6)
0	$y = -4(0) + 2 = 0 + 2 = 2$	(0, 2)
1	$y = -4(1) + 2 = -4 + 2 = -2$	(1, –2)
2	$y = -4(2) + 2 = -8 + 2 = -6$	(2, –6)

www.elsolucionario.org

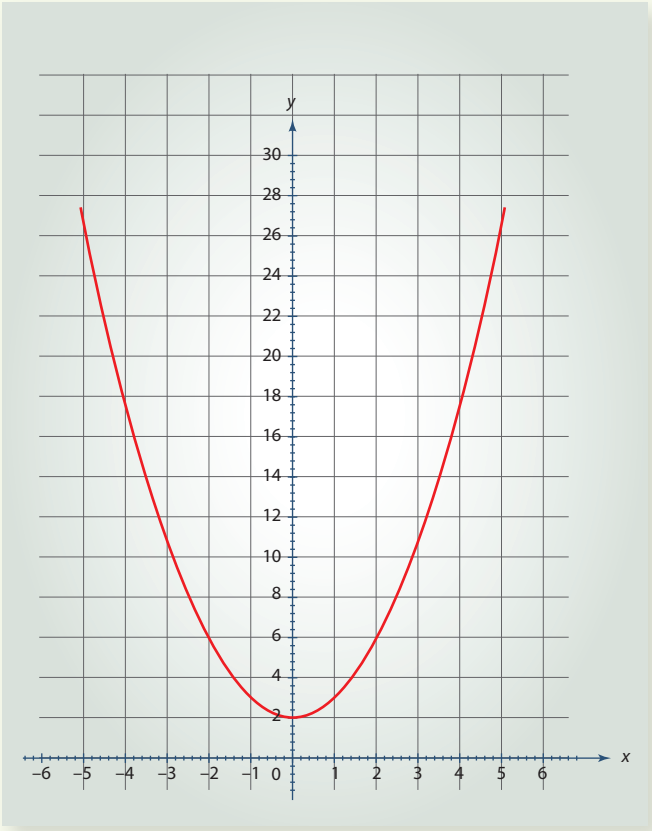
c)

x	$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$	(x, y)
-1	$y = \frac{(-1)}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$	$(-1, -1)$
0	$y = \frac{(0)}{2} - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
1	$y = \frac{(1)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$	$(1, 0)$
2	$y = \frac{(2)}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\left(2, \frac{1}{2}\right)$

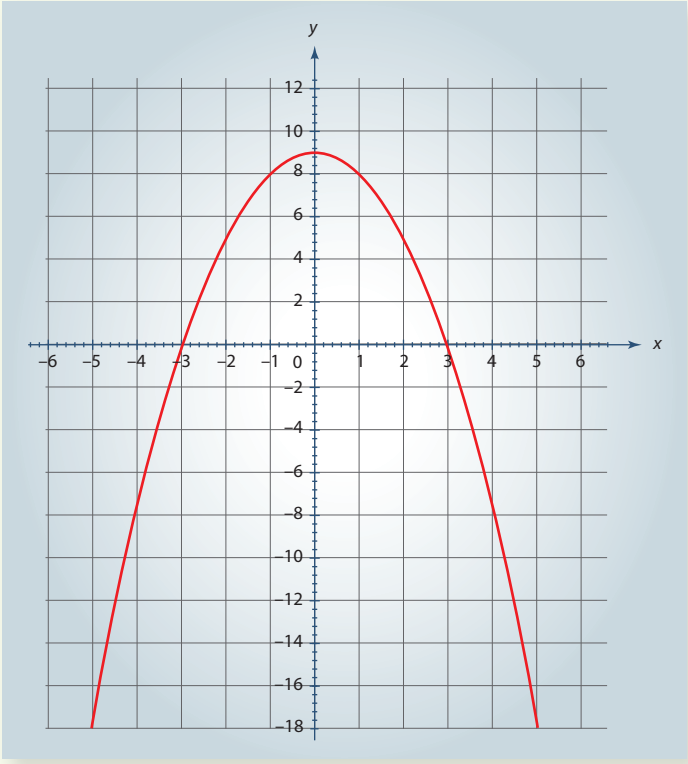


d)

x	$y = x^2 + 2$	(x, y)
-1	$y = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$	$(-1, 3)$
0	$y = (0)^2 + 2 = 0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$y = (1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$	$(1, 3)$
2	$y = (2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$	$(2, 6)$



e)



x	$y = 9 - x^2$	(x, y)
–1	$y = 9 - (-1)^2 = 9 - 1 = 8$	(–1, 8)
0	$y = 9 - (0)^2 = 9 - 0 = 9$	(0, 9)
1	$y = 9 - (1)^2 = 9 - 1 = 8$	(1, 8)
2	$y = 9 - (2)^2 = 9 - 4 = 5$	(2, 5)

6.

Inciso	Intersección con el eje x	Intersección con el eje y
a)	2	–3
b)	–3	–1.5
c)	2	8
d)	–3 y 3	9
e)	–8	–2 y 2
f)	$-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$	10

Ejercicio 2

1. *a)* $P(3.875, 1.125)$

b) $P(-1.429, -5.857)$

c) $P(-0.25, 2)$

d) $P(0.75, 3.25)$

e) $P(-0.033, 1.4)$

www.elsolucionario.org

f) $P(1.027, 0.312)$

g) $P(-10, 22)$

h) $P(-19.5, -4)$

2. $P_2(6.75, -4.25)$

3. $P_1(-1.286, -1.143)$

4. $P(9.417, 0.5)$

5. $P\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$

Ejercicio 3

1. *a*) $P(0.5, 4)$

b) $P(4.5, 3)$

c) $P(0.333, 0.175)$

d) $P(1.5, -2.35)$

e) $P(2.5, 3)$

f) $P(8, 1.5)$

g) $P(4.3, 3.6)$

h) $P(2.667, 1.125)$

2. $P_2(8, 9)$

3. 6.576 u, 12.207 u y 11.011 u

4. $x = -2$ y $y = 1$

5. $x = 0.5$

6. $V_1(1, 6)$, $V_2(-3, 0)$, $V_3(7, -6)$

Ejercicio 4

Parte I

1. *a)* 4.472 u

b) 7.810 u

c) 8.602 u

d) 6.403 u

e) 8.544 u

f) 10.000 u

2. $\overline{PQ} = \overline{PR} = 8.062$ u $\overline{QR} = 7.211$ u $\Rightarrow$ Dos lados iguales y uno desigual $\Rightarrow$ Triángulo isósceles

3. 30.736 u

4. $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = 5$ u $\Rightarrow$ Cuatro lados iguales $\Rightarrow$ Cuadrado

5. 65.5 u

6. *a)* Distancia entre El Pescadito y La Palmita = 154 u

b) Distancia entre La Palmita y Las Vigas = 231 u

7. *a)* 25.5 u^2

b) 26 u^2

Parte II

1. *a)* (365, 95)

b) (445, 160)

c) (85, 20)

d) (500, 190)

e) (460, 80)

f) (210, 310)

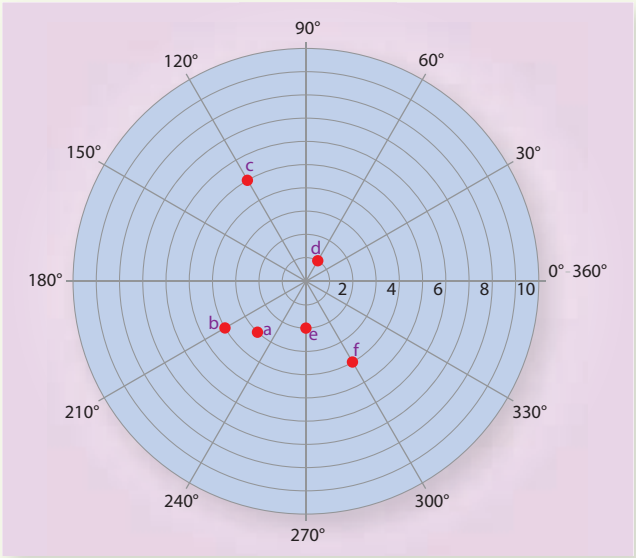
2. 106 u

3. 8 025 u^2

www.elsolucionario.org

Ejercicio 5

1.



2. *a)* (3.606, 123.901°)

b) (5, 90°)

c) (3.162, 18.435°)

d) (2.828, 60°)

e) (3, 180°)

f) (3, 131.81°)

3. *a)* $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

b) (0, –1)

c) (–1.443, –0.833)

d) (–2.25, –3.897)

e) (–1.057, –2.266)

f) (–4.243, –4.243)

Ejercicio 6

1. *a)* $r = \dfrac{5}{\operatorname{sen}\theta}$

b) $r = \dfrac{-2}{2\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta}$

c) $\theta = 75° 57' 50''$

d) $r = \dfrac{-2}{1 - \cos\theta}$ o $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

e) $r = \dfrac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ o $r = \dfrac{-6}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

f) $r = \dfrac{3}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ o $r = \dfrac{-3}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

g) $r = 5$ o $r = -5$

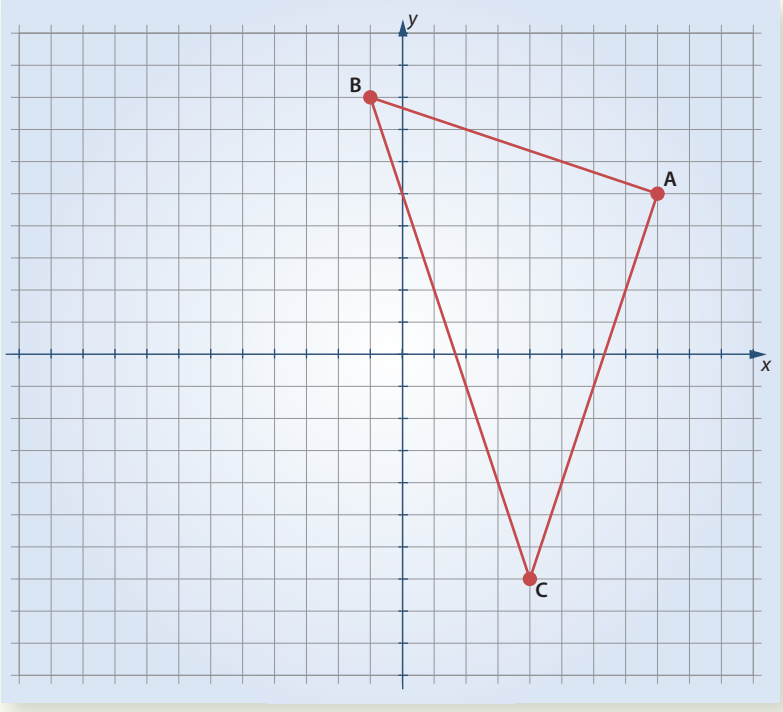
h) $r = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ o $r = \dfrac{-2}{\sqrt{\cos 2\theta}}$

i) $r = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ o $r = \dfrac{-1}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

2. *a)* $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y - 2y^3 - 4x^2 - 3y^2 = 0$

b) $8x^2 - y^2 - 12x + 4 = 0$

Recuperación de información



1. *d)* Rectángulo

2. *c)* 37.95 u

www.elsolucionario.org

3. *a)* $60\ u^2$

4. *b)* $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. *a)* 13.5 u

6. *c)* $\left(-4, \frac{20}{3}\right)$

7. *a)* $\left(\sqrt{3}, 1\right)$

8. *a)* $\left(\sqrt{89}, 58°\right)$

9. *d)* (2.5, –4.33)

10. *a)* $r = -\frac{4}{3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

Unidad 2: **Lugares geométricos. La recta**

Ejercicio 1

1. *a)* $m = -2$, $\theta = 116.565°$

b) $m = -1$, $\theta = 135°$

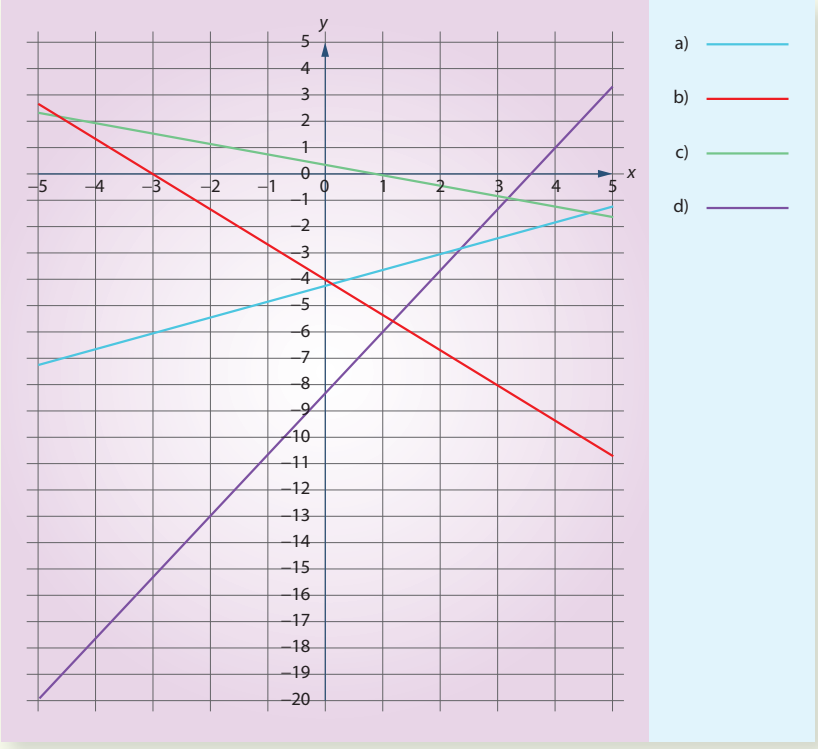
c) $m = 0.333$, $\theta = 18.435°$

d) Recta vertical, $\theta = 90°$

e) Recta vertical, $\theta = 90°$

f) $m = 2.5$, $\theta = 68.199°$

2.



3. *a)* $m = -0.714$, $\theta = 144.462°$

b) $m = 1.667$, $\theta = 59.036°$

c) $\theta = 90°$ (línea vertical)

d) $m = 3.000$, $\theta = 71.565°$

4. *a)* $m = -\$560$/mes

b) $V = \$11\,420$

5. *a)* $m = \$7\,090.91$/año

b) $V = \$361\,636.36$

6. *a)* $m = \$9.45$/unidad

b) $V = \$13\,900$

7. *b)* $P = \rho gh$

c) $P = 22\,540$ Pa

d) $h = 1.388$ m

Ejercicio 2

1. *a)* $7x - 9y + 8 = 0$

b) $4x - 10y + 38 = 0$

c) $2x + y + 2 = 0$

d) $4x + 5y + 20 = 0$

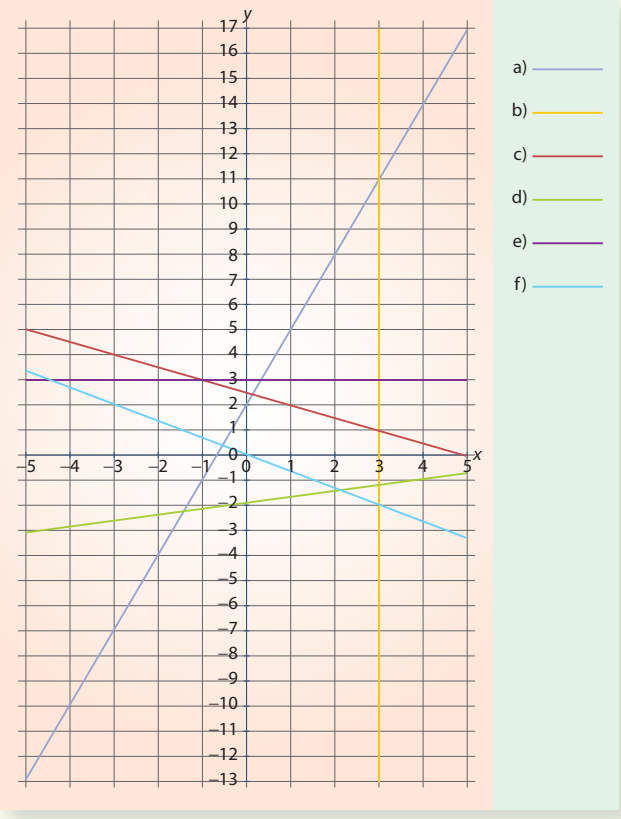
e) $10x + 9y - 32 = 0$

f) $3x + 4y + 17 = 0$

g) $x - \sqrt{3}\,y + 4 + 2\sqrt{3} = 0$

h) $\sqrt{3}\,x + y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$

2.



www.elsolucionario.org

3. *a)* $y = \$67\,600 - \$4\,400t$

b) \$50 000

c) 15.364 años o 15 años 4 meses 11 días

4. *a)* $y = \$991\,428.57 - \$21\,428.57t$

b) \$991 428.57

c) \$562 857.14

d) La tasa de depreciación, es decir, \$21 428.57 cada año

5. *a)* $y = \$3.50x + \$10$

b) \$52

c) 31.43 km

6. *a)* $y = \$4\,690 - \$398.65t$

b) \$3 095.40

c) 11.765 años = 11 años 9 meses 5 días

7. *a)* $T_{°C} = \frac{5}{9}(T_{°F} - 32)$ y $T_{°F} = 1.8\,T_{°C} + 32$

b) 212 °F

c) 76.67 °C

Ejercicio 3

1. *a)* $a = 2,\ b = -3$

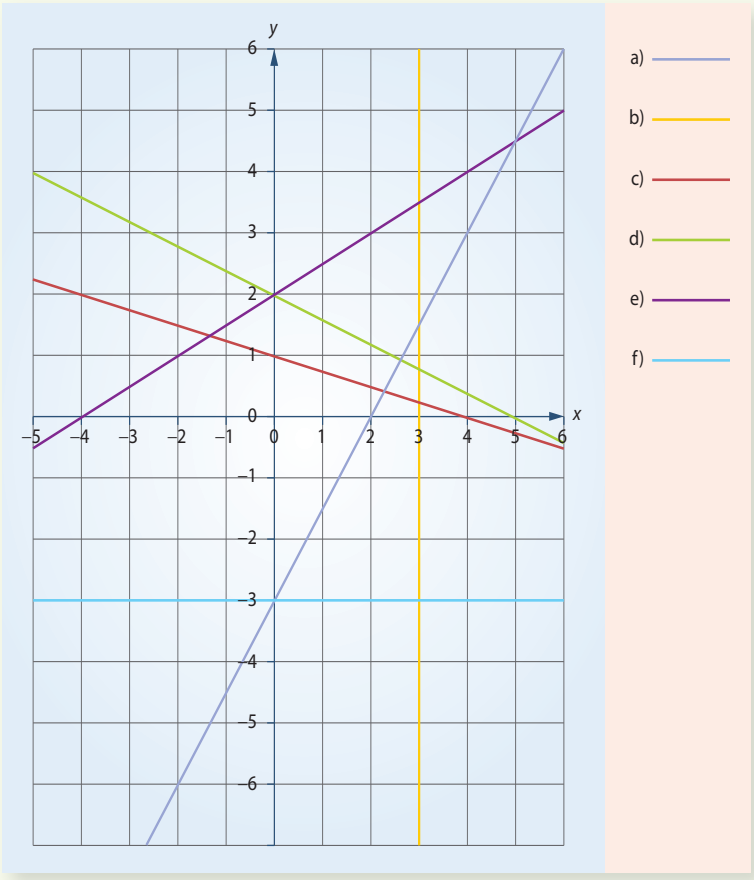
b) $a = 4,\ b = 1$

c) $a = 5,\ b = 2$

d) $a = -4,\ b = 2$

e) $a = 3$

f) $b = -3$



2. *a)* $y = -3x + 3$

b) $y = 2.5x + 5$

c) $y = -x - 2$

d) $y = 0.8x + 1$

e) $y = 4x - 0.5$

f) $y = -0.5x - 2$

3. *a)* $y = \$3.5x + \$13\,800$

b) \$16 425

c) 1 250 artículos

4. *a)* $y = -\$1\,250x + \$25\,100$

b) m representa la tasa de depreciación anual y b el valor actual.

c) \$12 600

5. *a)* $y = \frac{399}{392}x$

b) \$2 157.86

c) 1 680 km

Ejercicio 4

1. *a)* $4x + 5y - 33 = 0$

b) $7x - 5y + 15 = 0$

c) $3x - 6y + 18 = 0$

d) $x + 4y + 23 = 0$

e) $3x + 4y - 9 = 0$

f) $x - y - 3.1 = 0$

2. *a)* $4x - y - 3 = 0$

b) $3x - 2y + 6 = 0$

c) $2x + y + 1 = 0$

d) $30x - 20y + 29 = 0$

e) $5x - 2y + 3 = 0$

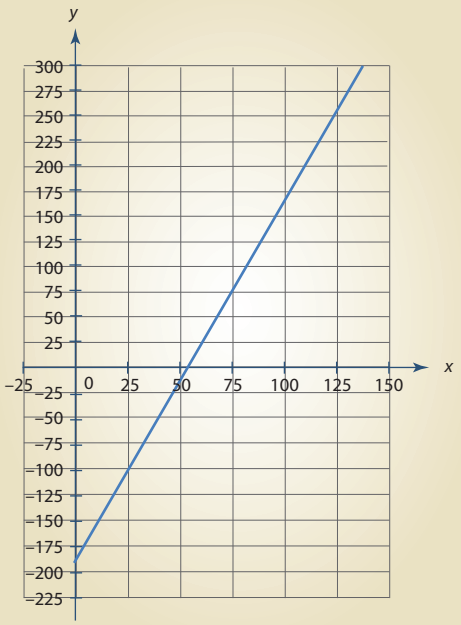
f) $7x + 3y - 1 = 0$

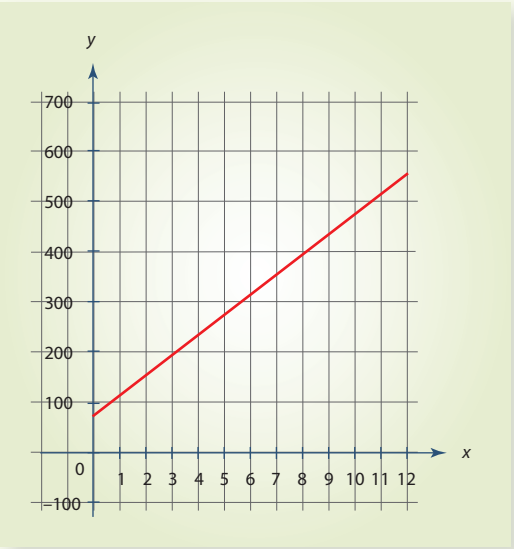
www.elsolucionario.org

3. *a)* $P = 3.51L - 192$

b) 194.1 pies

c)





4. *a)* $y = \$70 + \$40x$

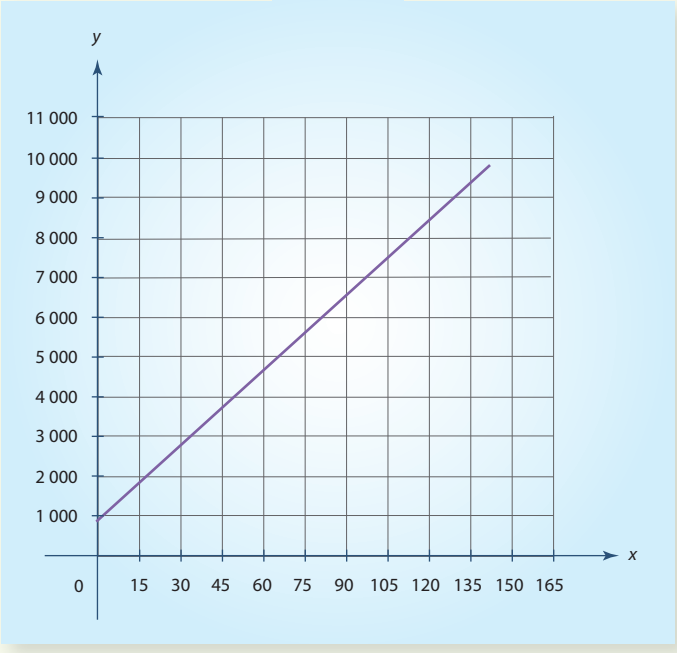
b) \$250

c)

5. *a)* $y = 64x + 850$

b) \$7 250

c)



6. *a)* $y = \dfrac{\$17x + \$115}{3}$

b) $151.67

c) Costo fijo = $38.33, costo variable = $5.67

Ejercicio 5

1. *a)* $a = -2,\ b = 3$

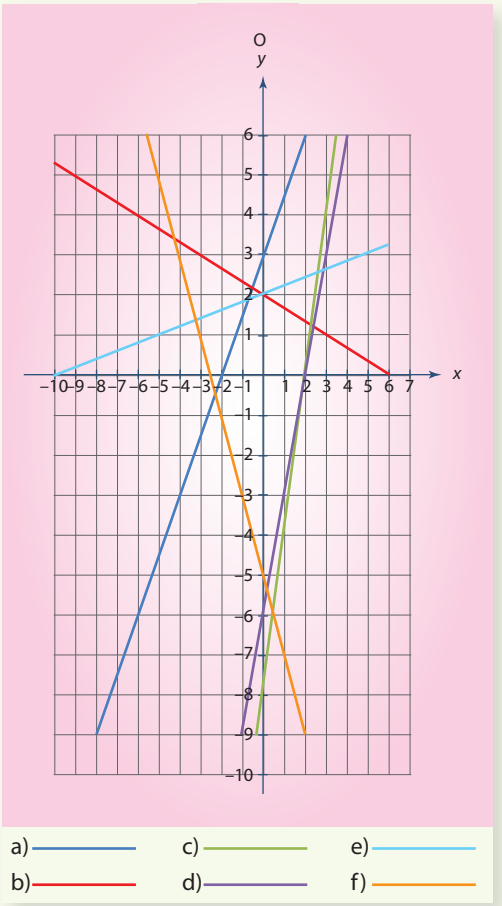
b) $a = 6,\ b = 2$

c) $a = 2,\ b = -8$

d) $a = 2,\ b = -6$

e) $a = -10,\ b = 2$

f) $a = -2.5,\ b = -5$



2. *a)* $\dfrac{x}{-\frac{4}{3}} + \dfrac{y}{-\frac{4}{5}} = 1$

b) $\dfrac{x}{3\sqrt{3}} + \dfrac{y}{-3} = 1$

c) $\dfrac{x}{-\frac{17}{8}} + \dfrac{y}{-\frac{17}{3}} = 1$

d) $\dfrac{x}{1.4} + \dfrac{y}{3.5} = 1$

www.elsolucionario.org

e) $\dfrac{x}{\frac{4}{3}} + \dfrac{y}{-\frac{4}{5}} = 1$

f) $\dfrac{x}{-\frac{2}{5}} + \dfrac{y}{-2} = 1$

g) $\dfrac{x}{-\frac{11}{2}} + \dfrac{y}{-11} = 1$

h) $\dfrac{x}{\frac{20}{9}} + \dfrac{y}{-5} = 1$

3. $\dfrac{x}{\frac{1-\sqrt{21}}{10}} + \dfrac{y}{\frac{10}{1-\sqrt{21}}} = 1$ o $\dfrac{x}{\frac{1+\sqrt{21}}{10}} + \dfrac{y}{\frac{10}{1+\sqrt{21}}} = 1$

4. $\overline{AB}$ $\dfrac{x}{\frac{23}{6}} + \dfrac{y}{\frac{23}{7}} = 1$

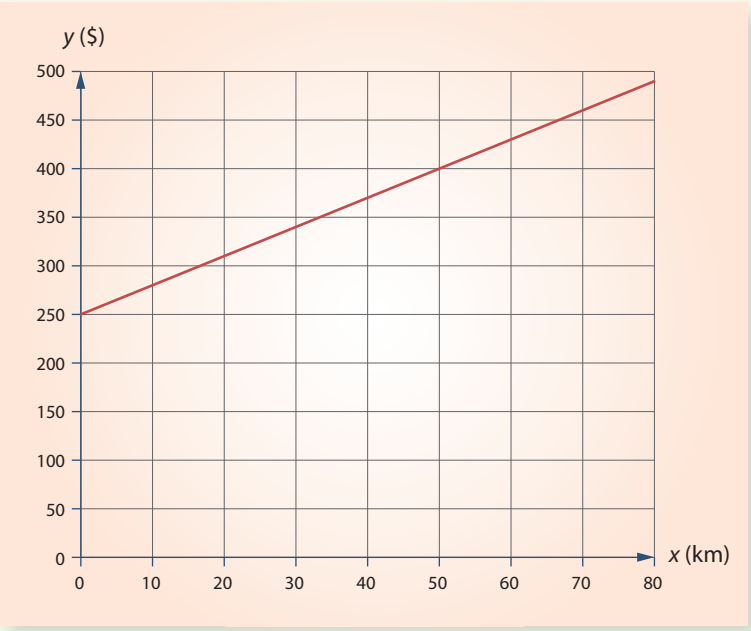
$\overline{BC}$ $\dfrac{x}{-9} + \dfrac{y}{-\frac{9}{4}} = 1$

$\overline{CA}$ $\dfrac{x}{\frac{43}{9}} + \dfrac{y}{\frac{43}{5}} = 1$

5. $y = \dfrac{x + 46\,000}{300}$

6. *a)* $y = \$3x + \$250$

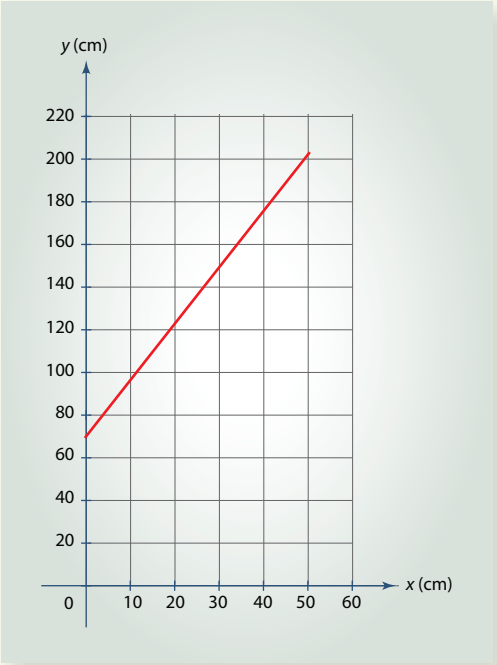
b)



c) $460

7. *a)* $y = \dfrac{8x + 211}{3}$

b)

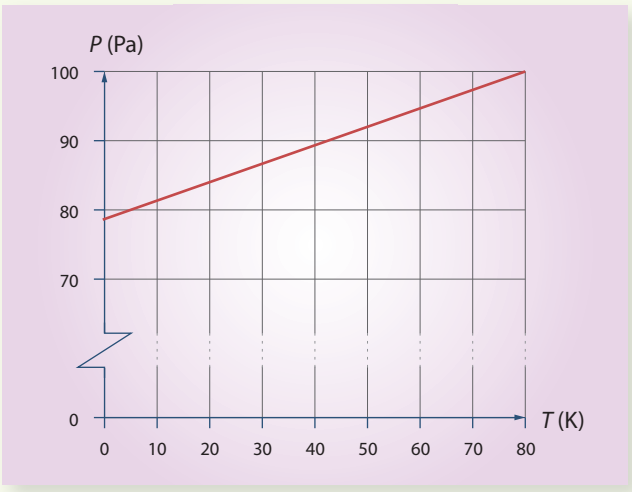


c) 162.33 cm

8. *a)* $m = 0.25$ Pa/K

b) El aumento de la presión por cada grado Kelvin de aumento en la temperatura.

c)



www.elsolucionario.org

Ejercicio 6

1. *a)* $0.5x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 4 = 0$

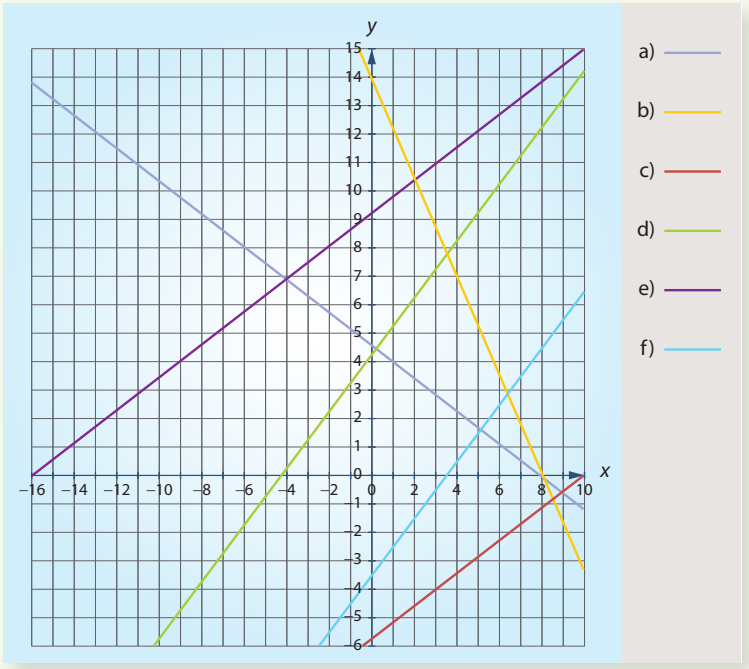
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}x + 0.5y - 7 = 0$

c) $0.5x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 5 = 0$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 3 = 0$

e) $-0.5x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 8 = 0$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2.5 = 0$



2. *a)* $-\frac{3}{\sqrt{34}}x + \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{6}{\sqrt{34}} = 0 \quad \rho = 1.029,\ \omega = 120.96°$

b) $\frac{1}{\sqrt{10}}x - \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{9}{\sqrt{10}} = 0 \quad \rho = 2.846,\ \omega = 288.43°$

c) $\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{7}{\sqrt{5}} = 0 \quad \rho = 3.130,\ \omega = 26.565°$

d) $-\frac{5}{\sqrt{41}}x - \frac{4}{\sqrt{41}}y - \frac{20}{\sqrt{41}} = 0 \quad \rho = 3.123,\ \omega = 218.66°$

e) $-\frac{4}{\sqrt{41}}x + \frac{5}{\sqrt{41}}y - \frac{3}{\sqrt{41}} = 0 \quad \rho = 0.4685,\ \omega = 128.66°$

f) $\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0 \quad \rho = 1.664,\ \omega = 56.31°$

3. *a)* $x - y + 5\sqrt{2} = 0$

b) $\sqrt{3}x + y - 16 = 0$

c) $x - y - 25\sqrt{2} = 0$

d) $\sqrt{3}x + y + 14 = 0$

e) $\sqrt{3}x - y + 32 = 0$

f) $x + y + 12\sqrt{2} = 0$

4. *a)* 3.606 u

b) –1.373 u

c) –5.777 u

d) 3.744 u

e) –10.198 u

f) 0.894 u

5. *a)* $y = \dfrac{a(t + 1)}{24}$

b) 166.67 mg

c) $-\dfrac{a}{\sqrt{576 + a^2}}t + \dfrac{24}{\sqrt{576 + a^2}}y - \dfrac{a}{\sqrt{576 + a^2}} = 0$

Ejercicio 7

1. *a)* $P(-3, -7)$

b) $P(2, -1)$

c) $P(-14, -11)$

d) $P(2, 1)$

e) $P\left(\dfrac{16}{13}, -\dfrac{9}{13}\right)$

f) $P(-3, 2)$

2. *a)* 1 332 unidades

b) 5 082 unidades

3. *a)* 192.31 unidades

b) Pérdida de $800

4. 3 500 bacterias y $300

www.elsolucionario.org

Ejercicio 8

1. 90°
2. 53.13°
3. Triángulo rectángulo
4. $x + 3y = 0$
5. x puede tener cualquier valor.
6. $x - 3y - 3 = 0$
7. $m_{AB} = m_{BC} = 1.25$
8. $3x + 2y - 17 = 0$
9. $9x + 3y - 14 = 0$
10. 82.235°
11. $d = 0.6$ u

Ejercicio 9

1. *a)* $6x + 7y - 2 = 0$
   b) $5x - 7y + 27 = 0$
   c) (–0.515557, 0.924287)
   d) $P\left(\frac{1}{3}, 0\right)$
2. *a)* $3x - 5y - 9 = 0$
   b) $\left(2\sqrt{53} + 7\sqrt{29}\right)x - \left(5\sqrt{53} + 2\sqrt{29}\right)y + 7\sqrt{53} - 22\sqrt{29} = 0$
   c) $P\left(\frac{4}{31}, \frac{21}{31}\right)$
   d) $P\left(\frac{151}{62}, -\frac{21}{62}\right)$
3. *a)* $\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{17}\right)x - \left(4\sqrt{5} + \sqrt{17}\right)y + 21\sqrt{5} = 0$
   b) $x + 2y - 3 = 0$

c) $P\left(-1, \frac{8}{3}\right)$

d) $P(-1.28411, 2.56341)$

4. *a)* $3x + 2y + 10 = 0$

b) $x + 3y + 6 = 0$

c) $P\left(-\frac{141}{27}, -\frac{61}{27}\right)$

d) $P\left(-\frac{7}{18}, -\frac{101}{54}\right)$

5. *a)* $6x + 4y - 23 = 0$

b) $4x + 5y + 13 = 0$

c) $P(2.47938, 0.855421)$

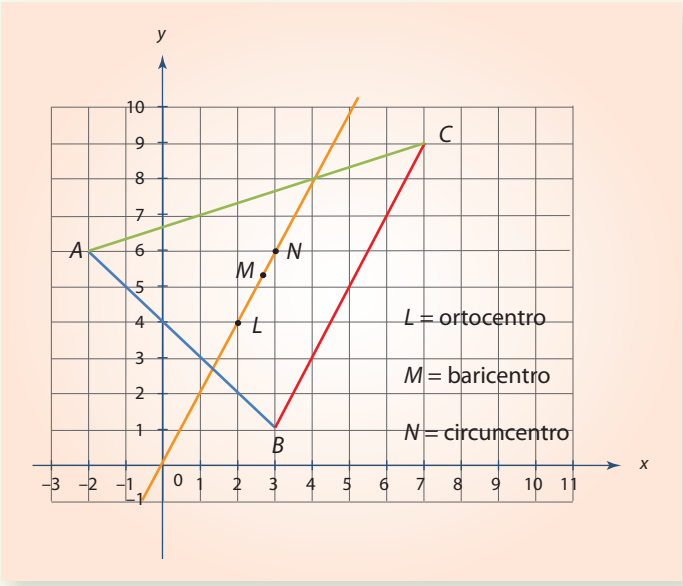
d) $P\left(-\frac{15}{14}, \frac{103}{14}\right)$

6. Ortocentro: $L(2, 4)$

Baricentro: $\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$

Circuncentro: $N(3, 6)$

La línea que une el ortocentro, el baricentro y el circuncentro se llama recta de Euler y su ecuación es $2x - y = 0$



www.elsolucionario.org

Recuperación de información

1. *b)* -10
2. *c)* $5x + y + 17 = 0$
3. *d)* $y = 3x - 2$
4. *d)* $y = \frac{5}{3}x - 15$
5. *a)* $3x + 4y - 3 = 0$
6. *b)* -2
7. *d)* $\frac{y}{4} - \frac{x}{5} = 1$
8. *a)* $3x + 4y - 5 = 0$
9. *d)* $4x + 3y = 0$
10. *a)* $\frac{9}{\sqrt{10}}$

Unidad 3: Lugares geométricos. Las cónicas

Ejercicio 1

1. *a)* $x^2 + y^2 - 14y + 33 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 7 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$
   d) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 16 = 0$
   e) $x^2 + y^2 - 49 = 0$
   f) $x^2 + y^2 + 8y + 15 = 0$

2. *a)* $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 103 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 6x - 44 = 0$
   c) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7 = 0$
   d) $x^2 + y^2 - 2y - 52 = 0$
   e) $x^2 + y^2 - 13 = 0$
   f) $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$

3. *a)* $x^2 + y^2 - 2y - 19 = 0$

b) $x^2 + y^2 + y - 7 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 12 = 0$

d) $x^2 + y^2 - x - y - 12 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 5x - 6y = 0$

f) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 9 = 0$

4. *a)* $x^2 + y^2 + 8y - \frac{84}{25} = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - \frac{71}{5} = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + \frac{409}{25} = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - \frac{427}{17} = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x + 10y + \frac{277}{13} = 0$

f) $x^2 + y^2 - \frac{81}{10} = 0$

5. $x^2 + y^2 - 49 = 0$ (x, y en km)

6. Juego: $x^2 + y^2 = 16$ (x, y en m)

Tazas en cualquier instante: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = \frac{9}{4}$ (x, y, h y k en m) donde: $h^2 + k^2 = 16$, por ejemplo en un determinado momento podrían estar en:

1° taza: $(x - 4)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$, 2° taza: $x^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4}$,

3° taza: $(x + 4)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$, 4° taza: $x^2 + (y + 4)^2 = \frac{9}{4}$.

7. 1° aspersor: $x^2 + y^2 = 9$ (x, y en m)

2° aspersor: $(x - 6)^2 + y^2 = 9$ (x, y en m)

Ejercicio 2

1. *a)* $C(2, -3)$, $r = 2\sqrt{2}$

b) $C(1, 5)$, $r = \sqrt{31}$

www.elsolucionario.org

c) $C(-4, 4)$, $r = \sqrt{39}$

d) $C(-5, -6)$, $r = \sqrt{57}$

e) $C\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ $r = \frac{\sqrt{29}}{2}$

f) $C(1, -2)$, $r = \sqrt{11}$

2. *a)* $12x^2 + 12y^2 + 26x + 21y - 276 = 0$

b) $17x^2 + 17y^2 - 21x - 73y - 90 = 0$

c) $11x^2 + 11y^2 + 153x - 271y + 522 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 5x + 3y - 4 = 0$

e) $7x^2 + 7y^2 + 133x + 147y - 462 = 0$

f) $47x^2 + 47y^2 - 73x - 425y - 592 = 0$

3. $11x^2 + 11y^2 - 530x - 1\,290y + 33\,000 = 0$

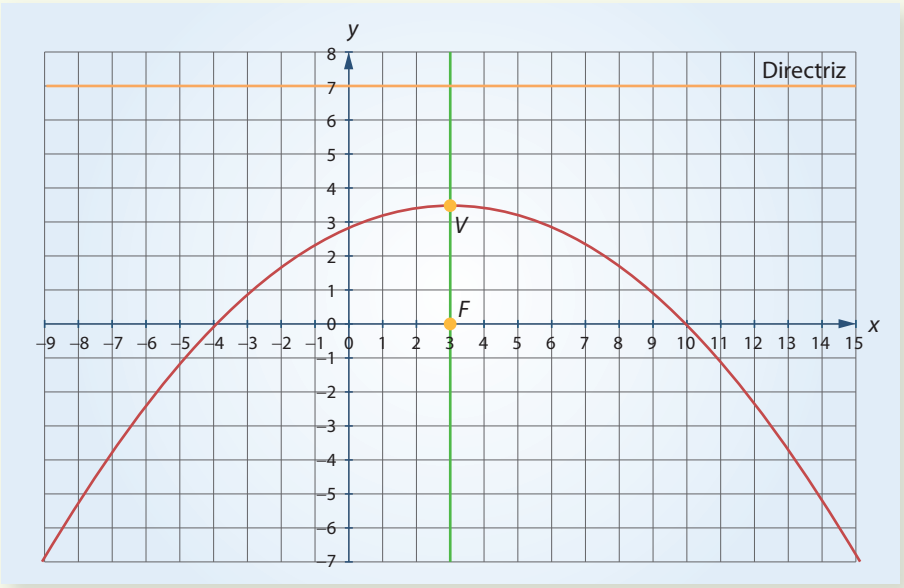
Superficie: 3 200 m^2

4. $y = \sqrt{x(9 - x)}$ (x, y en m)

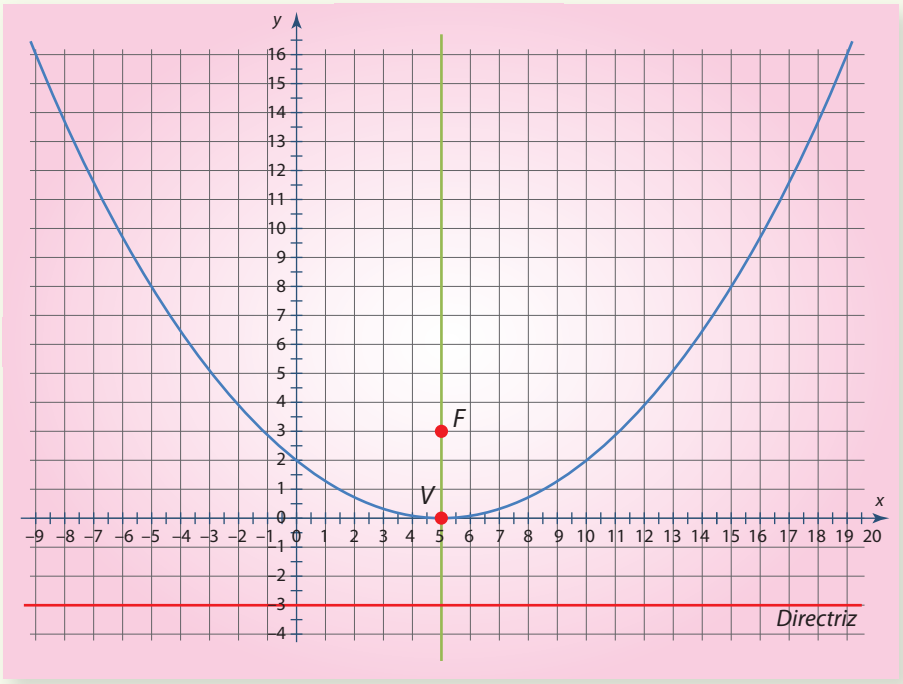
5. $2x^2 + 2y^2 - 14x - 5y - 118 = 0$

Ejercicio 3

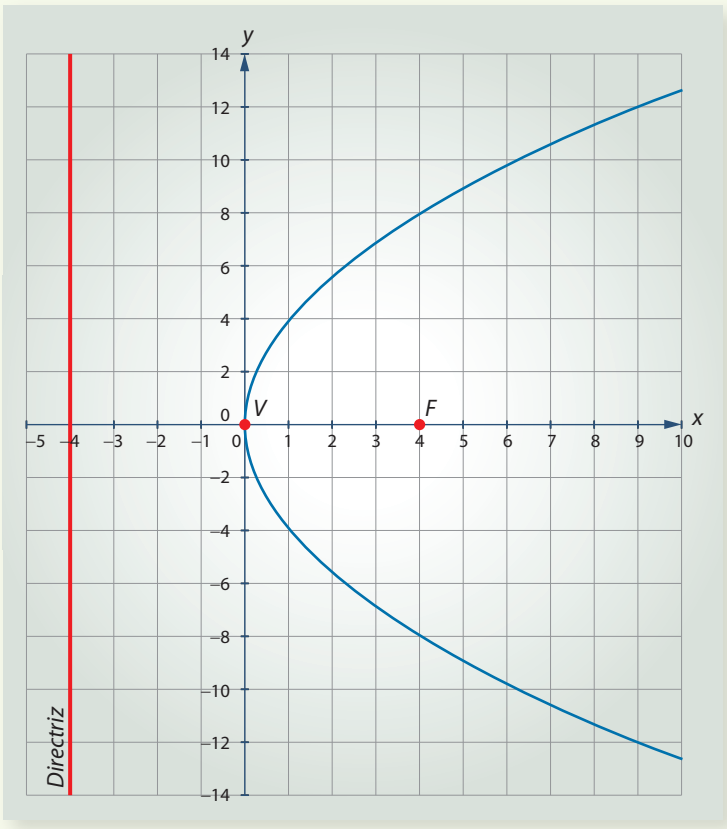
1. *a)* $x^2 - 6x + 14y - 40 = 0$



b) $x^2 - 10x - 12y + 25 = 0$

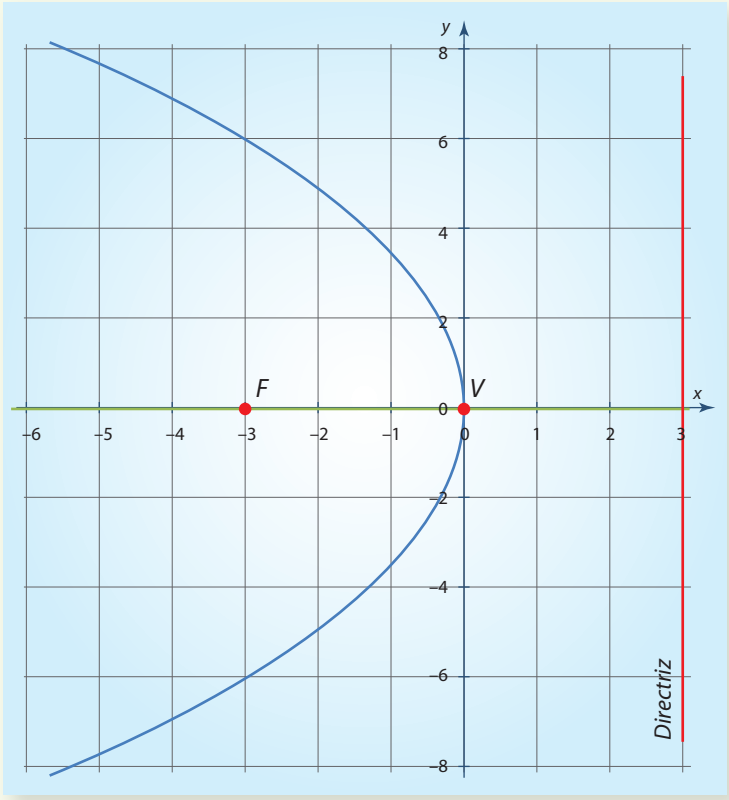


c) $y^2 - 16x = 0$

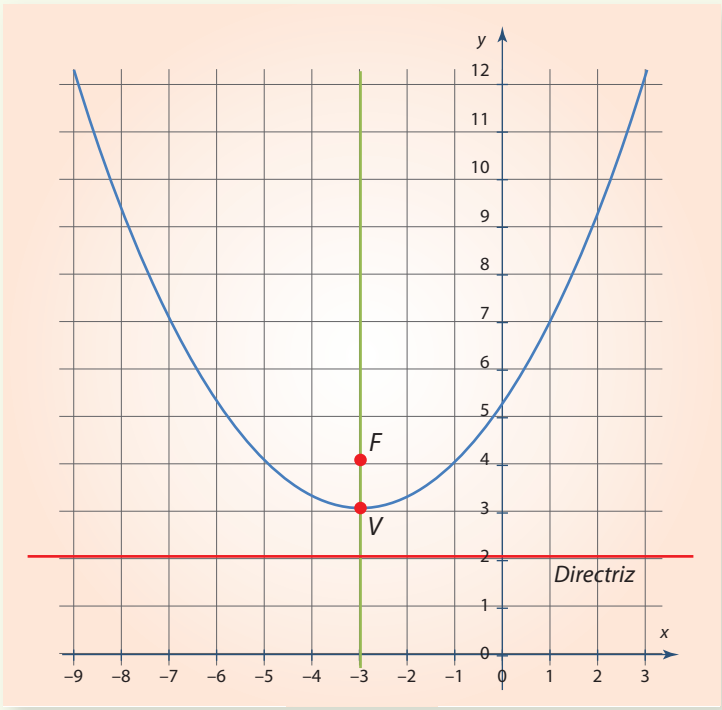


www.elsolucionario.org

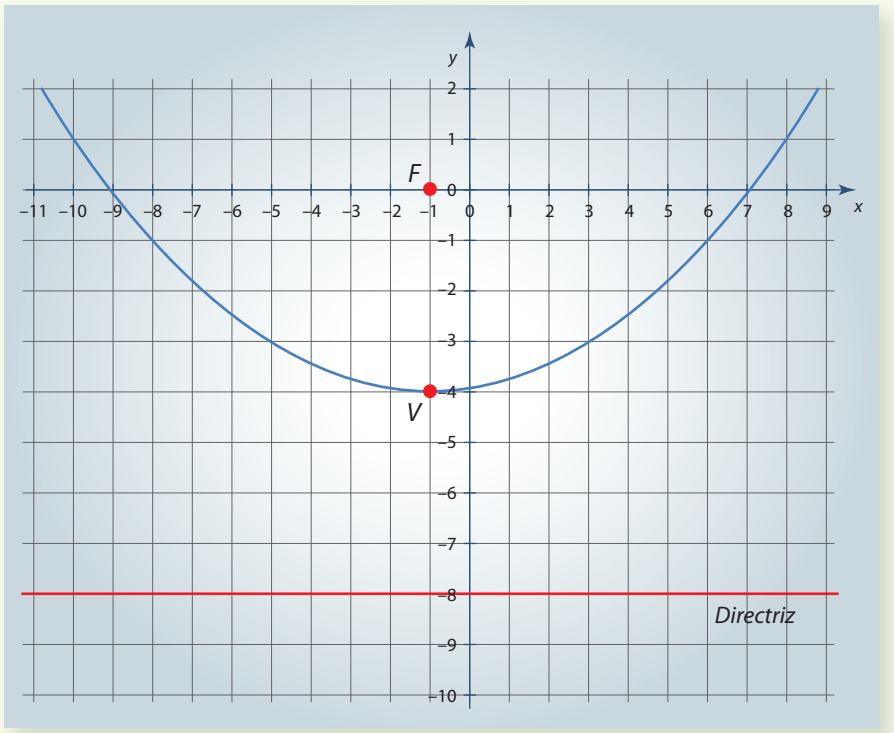
d) $y^2 + 12x = 0$



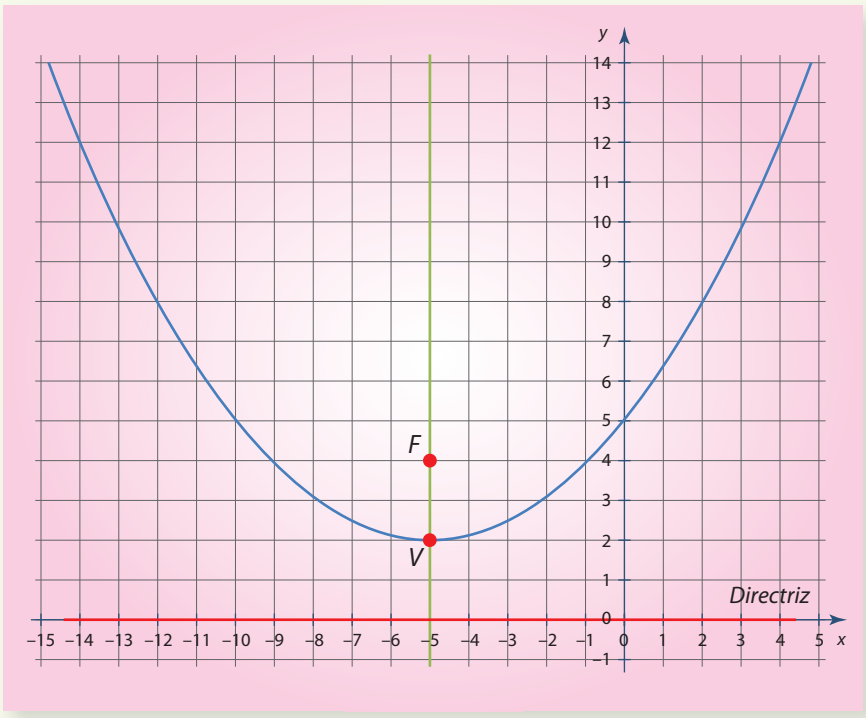
e) $x^2 + 6x - 4y + 21 = 0$



f) $x^2 + 2x - 16y - 63 = 0$

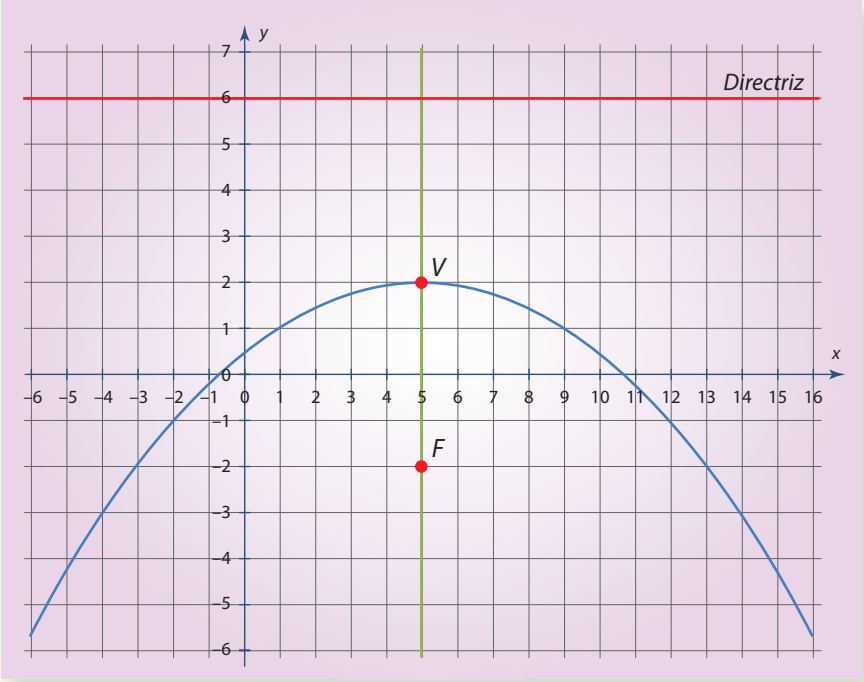


g) $x^2 + 10x - 8y + 41 = 0$



www.elsolucionario.org

h) $x^2 - 10x + 16y - 7 = 0$

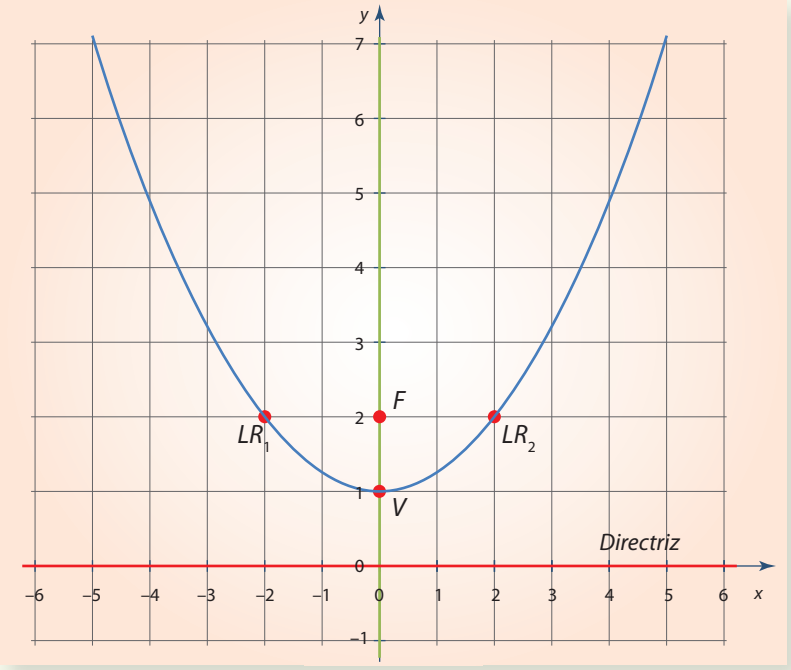


2. 35 cm

3. 4.07 m

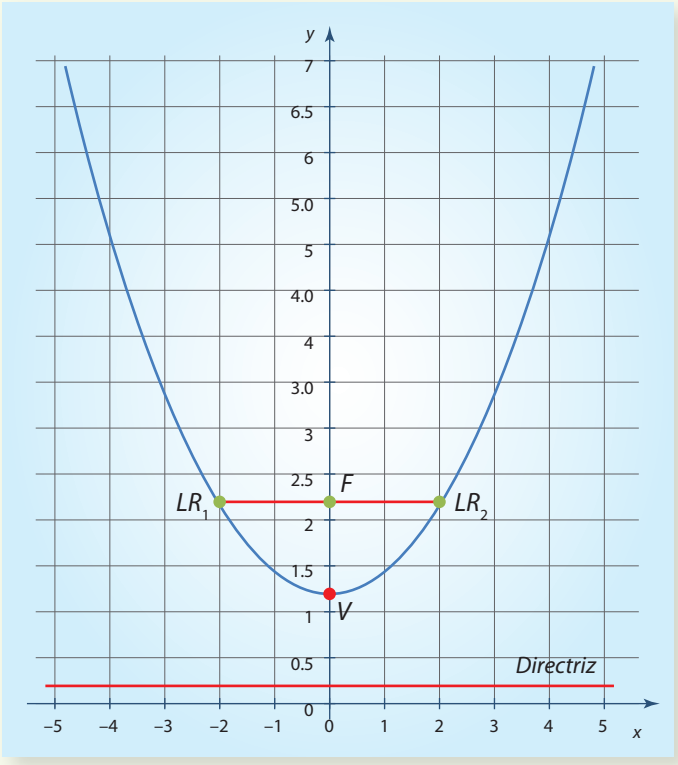
Ejercicio 4

1. *a)* $V(0, 1)$, $F(0, 2)$, $p = 1$, directriz: $y = 0$
Extremos lado recto: $(-2, 2)$ y $(2, 2)$



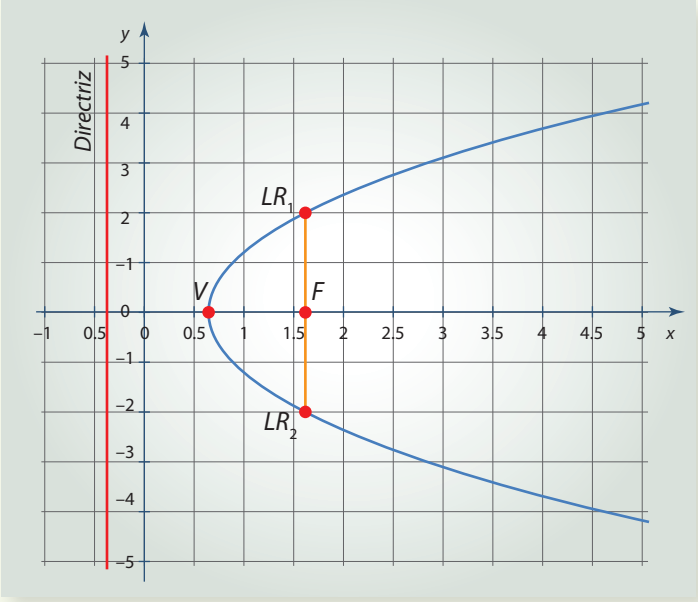
b) $V(0, 1.25)$, $F(0, 2.25)$, $p = 1$, directriz: $y = 0.25$

Extremos lado recto: $(-2, 2.25)$ y $(2, 2.25)$



c) $V(0.625, 0)$, $F(1.625, 0)$, $p = 1$, directriz: $x = -0.375$,

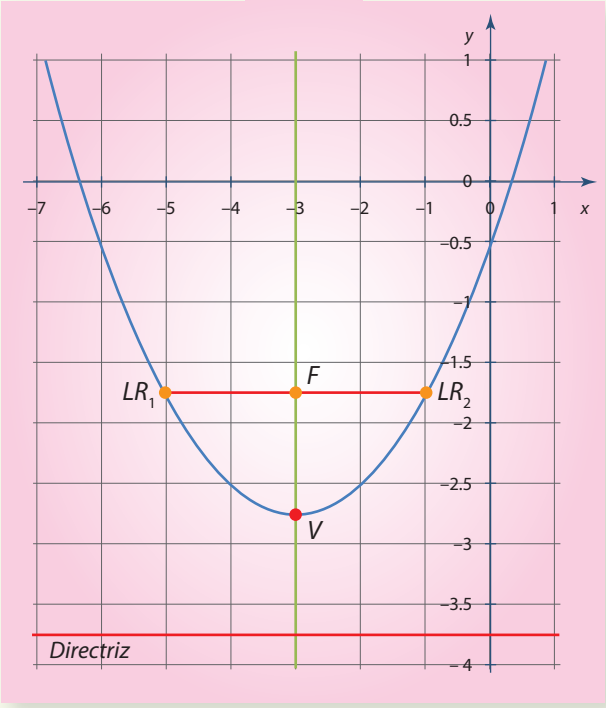
Extremos lado recto: $(1.625, -2)$ y $(1.625, 2)$



www.elsolucionario.org

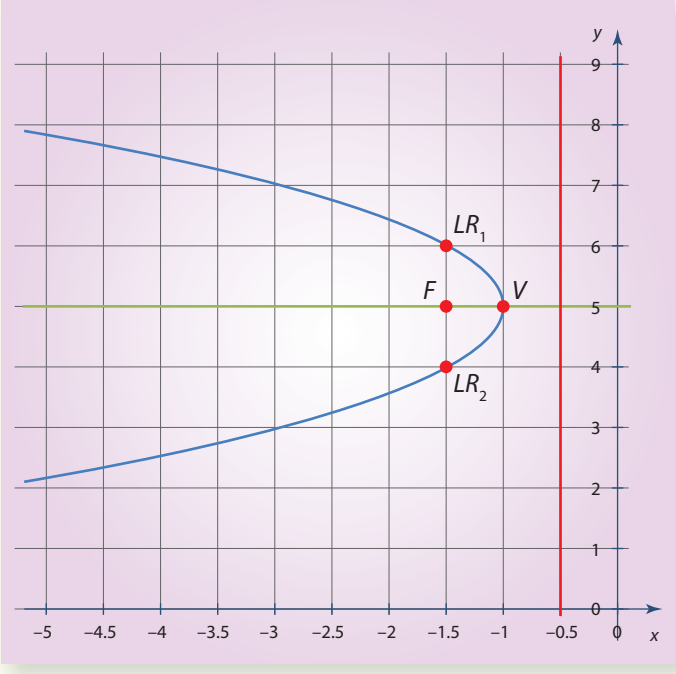
d) $V(-3, -2.75)$, $F(-3, -1.75)$, $p = 1$, directriz: $y = -3.75$

Extremos lado recto: $(-1, -1.75)$ y $(-5, -1.75)$



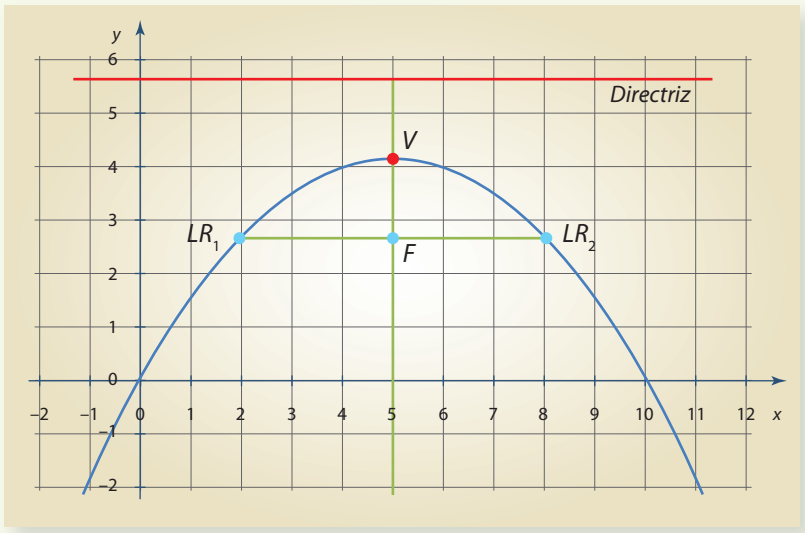
e) $V(-1, 5)$, $F(-1.5, 5)$, $p = -0.5$, directriz: $x = -0.5$

Extremos lado recto: $(-1.5, 6)$ y $(-1.5, 4)$



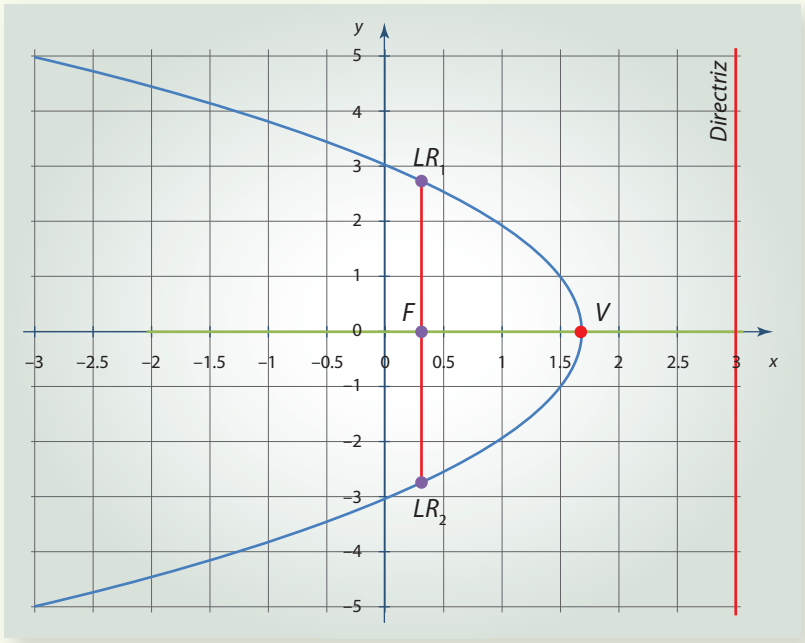
f) $V\left(5, \frac{25}{6}\right)$ $F\left(5, \frac{8}{3}\right)$ $p = -1.5$, directriz: $y = \frac{17}{3}$

Extremos lado recto: $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ y $\left(8, \frac{8}{3}\right)$



g) $V\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ $F\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ $p = -\frac{4}{3}$ directriz: $x = 3$

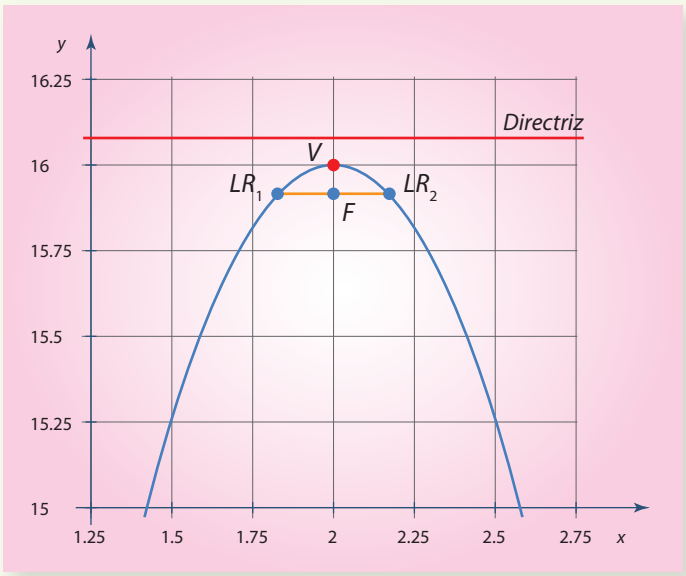
Extremos lado recto: $\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$



www.elsolucionario.org

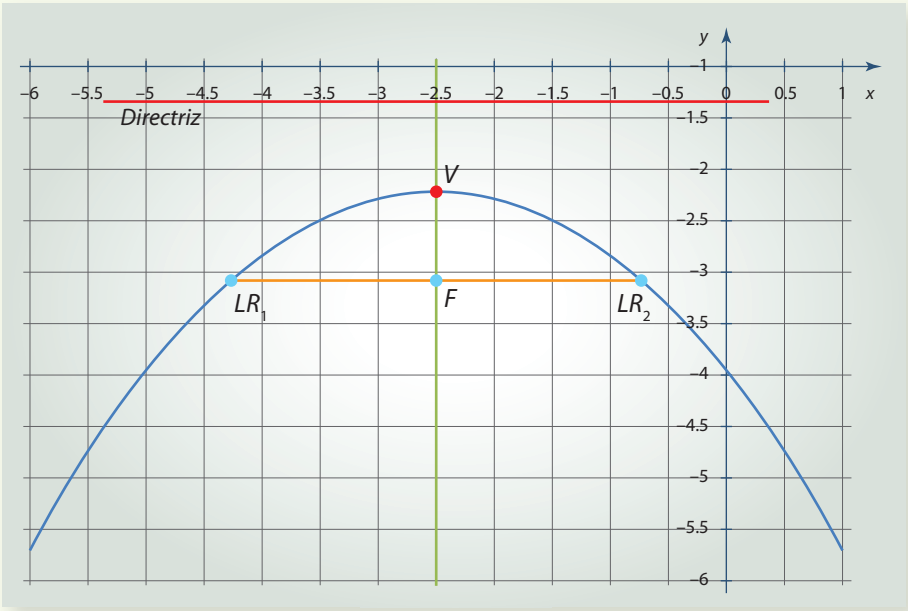
h) $V(2, 16)$, $F\left(2, \frac{191}{12}\right)$ $p = -\frac{1}{12}$ directriz: $y = \frac{193}{12}$

Extremos lado recto: $\left(\frac{11}{6}, \frac{191}{12}\right)$ y $\left(\frac{13}{6}, \frac{191}{12}\right)$



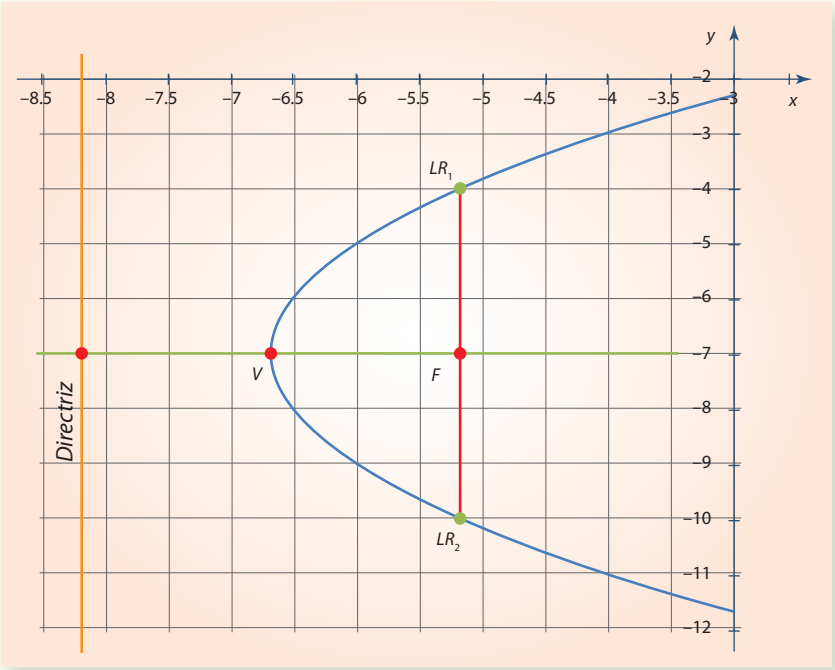
i) $V\left(-\frac{5}{2}, -\frac{31}{14}\right)$ $F\left(-\frac{5}{2}, -\frac{173}{56}\right)$ $p = -\frac{7}{8}$ directriz: $y = -\frac{193}{12}$

Extremos lado recto: $\left(-\frac{17}{4}, -\frac{173}{56}\right)$ $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{173}{56}\right)$



j) $V\left(-\frac{20}{3}, -7\right)$ $F\left(-\frac{31}{6}, -7\right)$ $p = 1.5$, directriz: $y = -\frac{49}{6}$

Extremos lado recto: $\left(-\frac{31}{6}, -10\right)$ y $\left(-\frac{31}{6}, -4\right)$



2. *a)* $y^2 - 10x - 6y + 24 = 0$

b) $x^2 - 6x + 12y + 21 = 0$

c) $y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$

d) $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$

3. 1.6 m

4. *b)* $39

c) $2 535

d) 65 audífonos

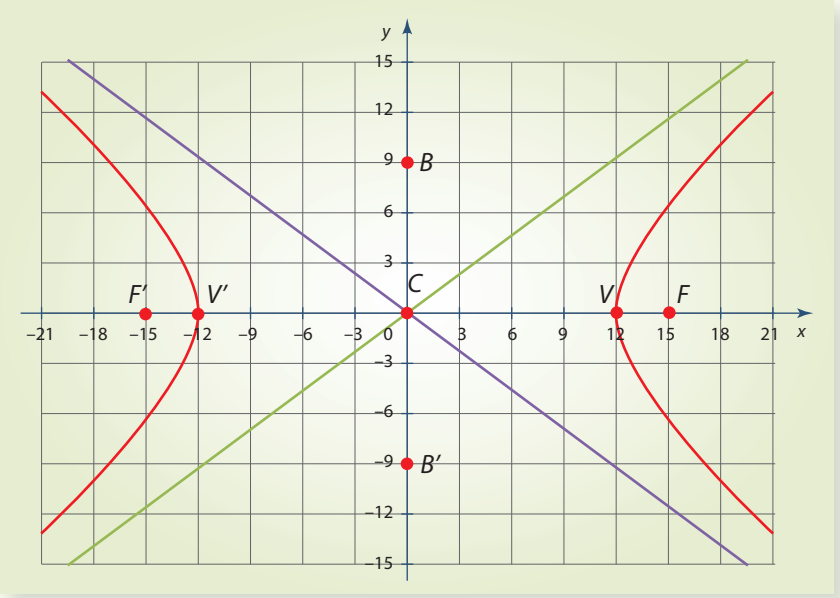
www.elsolucionario.org

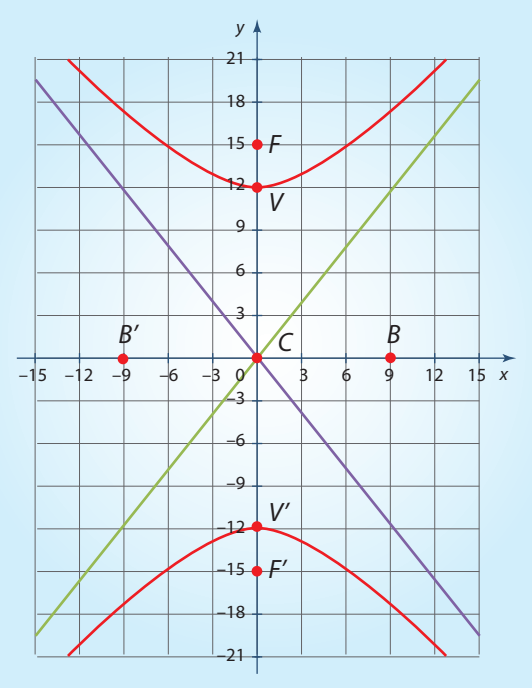
Ejercicio 5

1. $4x^2 + 3y^2 - 16x - 92 = 0$
2. $36x^2 + 25y^2 - 900 = 0$
3. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
4. $25x^2 + 16y^2 - 100x - 96y - 156 = 0$
5. $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$
6. $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$
7. $34x^2 + 9y^2 - 408x - 72y + 1\,062 = 0$
8. $4x^2 + 5y^2 + 16x + 10y - 79 = 0$
9. $169x^2 + 144y^2 - 24\,336 = 0$
10. $9x^2 + 25y^2 - 900 = 0$

Ejercicio 6

1. *a)* $a = 12$, $b = 9$, $c = 15$, $C(0, 0)$, $F'(-15, 0)$, $F(15, 0)$, $V'(-12, 0)$, $V(12, 0)$, $B'(0, -9)$, $B(0, 9)$, $e = 1.25$, $LR = 13.5$

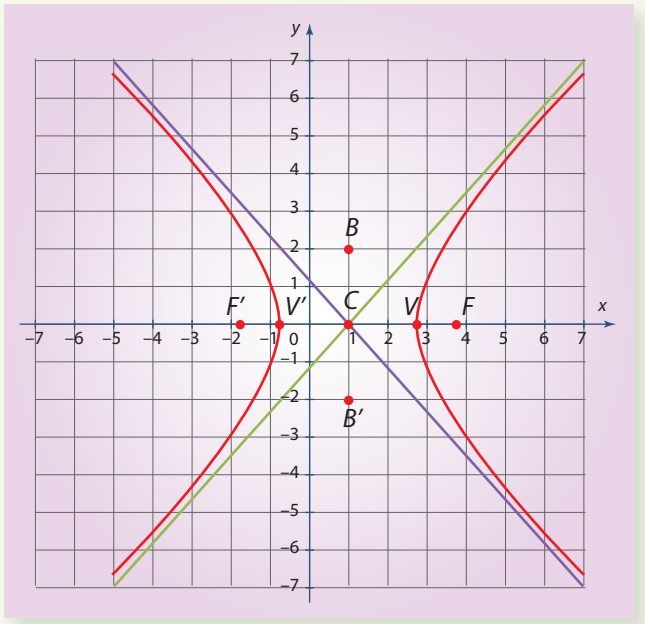


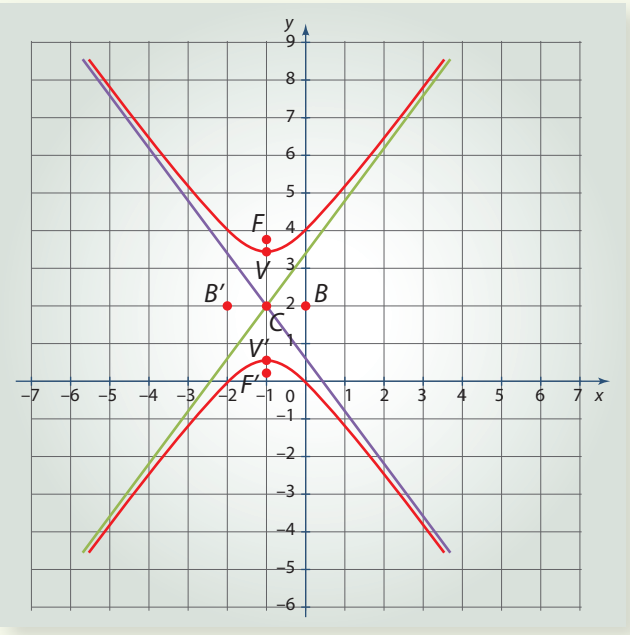


b) $a = 12$, $b = 9$, $c = 15$, $C(0, 0)$, $F'(0, -15)$, $F(0, 15)$, $V'(0, -12)$, $V(0, 12)$, $B'(-9, 0)$, $B(9, 0)$, $e = 1.25$, $LR = 13.5$

c) $a = \sqrt{3}$, $b = 2$, $c = \sqrt{7}$, $C(1, 0)$, $F'\left(1 - \sqrt{7}, 0\right)$, $F\left(1 + \sqrt{7}, 0\right)$, $V'\left(1 - \sqrt{3}, 0\right)$, $V\left(1 + \sqrt{3}, 0\right)$, $B'(1, -2)$, $B(1, 2)$,

$$e = \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad LR = \frac{8}{\sqrt{3}}$$





d) $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, $C(-1, 2)$, $F'\left(-1, 2 - \sqrt{3}\right)$, $F\left(-1, 2 + \sqrt{3}\right)$, $V'\left(-1, 2 - \sqrt{2}\right)$, $V\left(-1, 2 + \sqrt{2}\right)$, $B'(-2, 2)$, $B(0, 2)$, $e = \sqrt{1.5}$, $LR = \sqrt{2}$

www.elsolucionario.org

2. *a)* Hipérbola horizontal

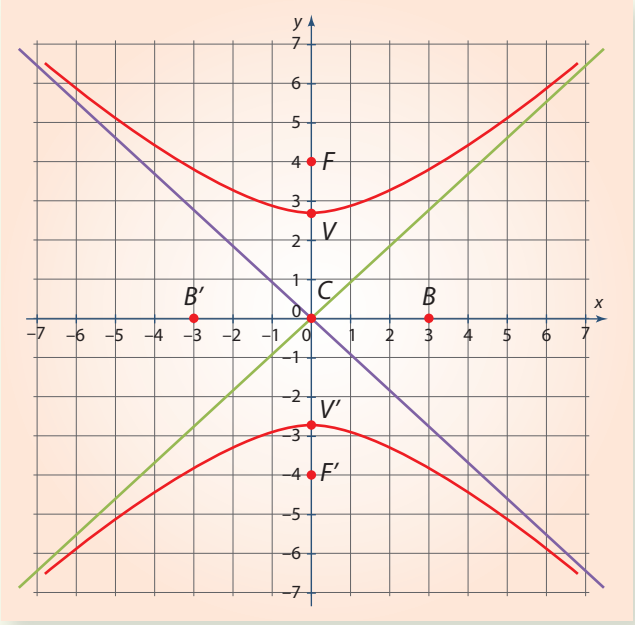
$4x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

Focos: $F'\left(-2\sqrt{13}, 0\right)$, $F\left(2\sqrt{13}, 0\right)$

Vértices: $V'(-6, 0)$, $V(6, 0)$

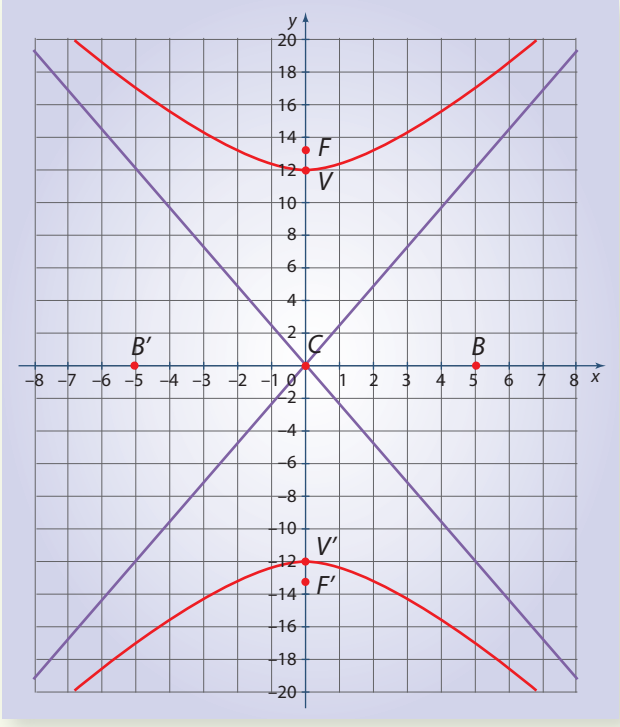
Eje transverso: eje x

Eje conjugado: eje y



b) $7x^2 - 9y^2 + 63 = 0$

c) $144x^2 - 25y^2 + 3\,600 = 0$



d) $16x^2 - 9y^2 - 96x + 18y + 279 = 0$

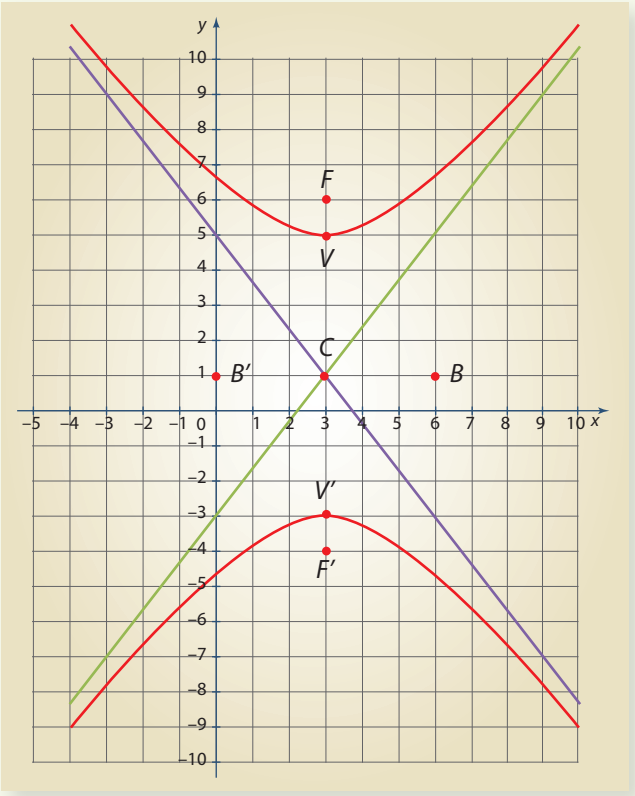
$e = 1.25$

$LR = 4.5$

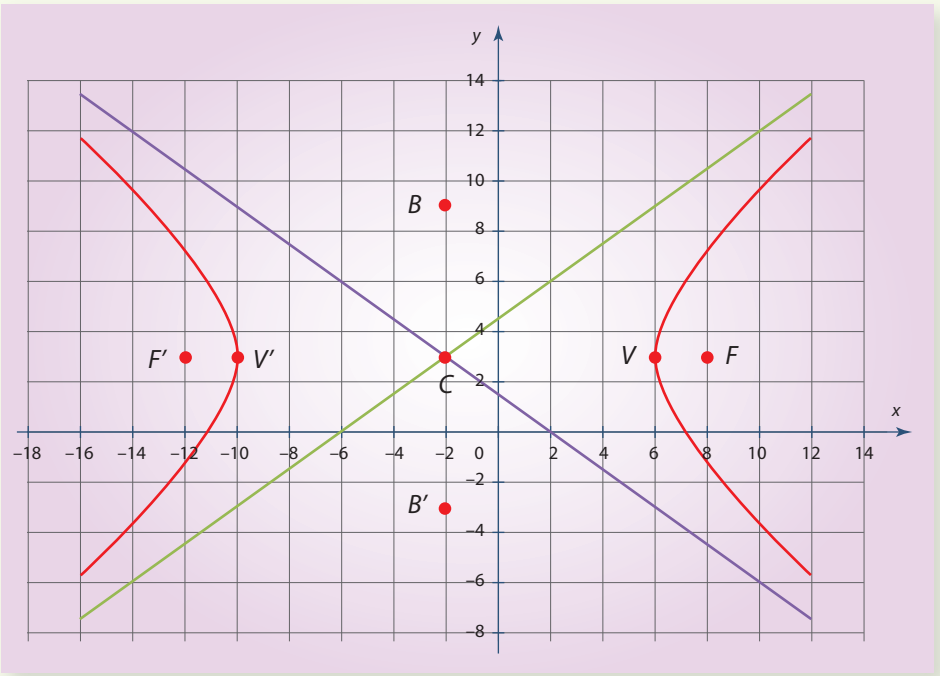
Asíntotas:

$4x + 3y - 15 = 0$

$4x - 3y - 9 = 0$

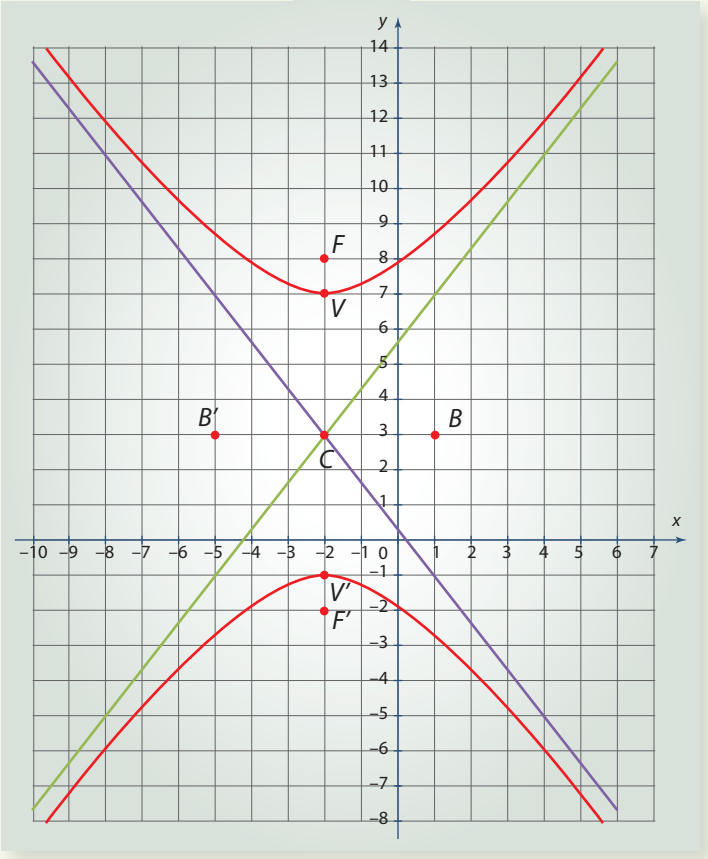


e) $36x^2 - 64y^2 + 144x + 384y - 2\,736 = 0$



www.elsolucionario.org

f) $C(-2, 3)$, $V'(-2, -1)$, $V(-2, 7)$, $F'(-2, -2)$, $F(-2, 8)$, $B'(-5, 3)$, $B(1, 3)$, $e = 1.25$, $LR = 4.5$



Recuperación de información

1. *a)* $c(5, -3)$, $r = 5$

2. *b)* $x^2 + y^2 - 16 = 0$

3. *c)* $y^2 + 8x = 0$

4. *d)* $x^2 + 4y = 0$

5. *b)* $F(2, 5)$

6. *a)* $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

7. *c)* $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

8. *a)* $C(2, 2)$

9. *d)* $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

10. *c)* $16x^2 - 4y^2 + 64 = 0$

11. *a)* $C(1, -1)$

GLOSARIO

Abscisa al origen. Abscisa del punto en que una recta corta al eje *x*.

Altura. Perpendicular trazada desde uno de los lados del triángulo o de su prolongación al vértice opuesto.

Asíntota. Recta a la que se aproxima continuamente una curva dada. La distancia entre la asíntota y la curva dada tiende a cero a medida que se extienden indefinidamente.

Baricentro. Punto de intersección de las medianas de un triángulo.

Bisectriz. Segmento de recta que divide un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos congruentes.

Circuncentro. Punto de intersección de las mediatrices de un triángulo.

Circunferencia. Lugar geométrico de los puntos que están a una distancia constante de otro punto fijo llamado centro.

Cónicas. Curvas que se obtienen al cortar un cono circular recto con un plano con diferentes ángulos de inclinación.

Cuadrante. Cada una de las cuatro regiones en que los ejes del sistema de coordenadas cartesianas dividen el plano.

Directriz. Recta perpendicular al eje focal que se encuentra a una distancia *p* del vértice de una parábola.

Ecuación general de la recta. Ecuación de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación normal de la recta. Ecuación en la que se utilizan el ángulo de la perpendicular a la recta dada que pasa por el origen (ω) y la distancia del origen a la recta dada (ρ). Tiene la forma:

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - \rho = 0$$

Ecuación simétrica de la recta. Ecuación en la que se usan la abscisa y la ordenada al origen y que tiene la forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Elipse. Lugar geométrico de los puntos del plano en los que la suma de las distancias dirigidas a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Geometría analítica. Rama de las Matemáticas que estudia la relación que existe entre el Álgebra y la Geometría utilizando como herramienta básica la asociación de números con puntos y las ecuaciones de figuras geométricas.

Hipérbola. Lugar geométrico de los puntos del plano en los que la diferencia de las distancias dirigidas a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Incentro. Punto de intersección de las bisectrices de un triángulo.

Mediana. Segmento que se traza desde el vértice de un triángulo hasta el punto medio del lado opuesto.

Mediatriz. Perpendicular que pasa por el punto medio de un lado de un triángulo.

Ordenada al origen. Ordenada del punto en que una recta corta al eje y.

Ortocentro. Punto de intersección de las alturas de un triángulo.

Parábola. Lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo llamado foco es igual a la distancia a una recta fija llamada directriz.

Pendiente. Tangente trigonométrica de la inclinación de una recta.

Recta. Lugar geométrico de los puntos tales que al tomar dos cualesquiera de ellos y calcular con ellos la pendiente, ésta siempre resulta constante.

Sistema de coordenadas polares. Sistema que, para representar puntos en el plano, usa un conjunto de circunferencias concéntricas cuyo centro es el origen y un ángulo.

Sistema de coordenadas rectangulares. Sistema que usa como referencia ejes ortogonales entre sí que se cortan en un punto llamado origen. En dos dimensiones las coordenadas se denominan abscisa (x) y ordenada (y) y representan la distancia al origen de las proyecciones ortogonales de un punto dado sobre cada uno de los ejes. También se conoce como sistema cartesiano.

www.elsolucionario.org

www.elsolucionario.org

www.elsolucionario.org